Ejercicios de números reales, raíces y logaritmos.

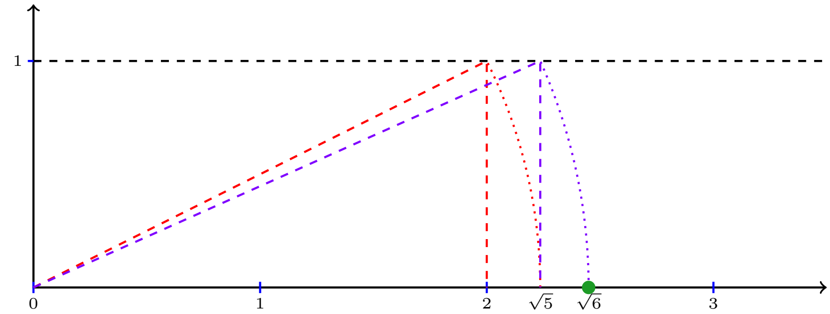
Ejercicio 1: Clasifica los siguientes números, indicando el subconjunto menor al que pertenecen.

- $\dfrac{3}{5} \in \mathbb{Q}$; $\quad -7,23 \in \mathbb{Q}$; $\quad 2,3\widehat{83} \in \mathbb{Q}$; $\quad \sqrt{51} \in \mathbb{I}$;

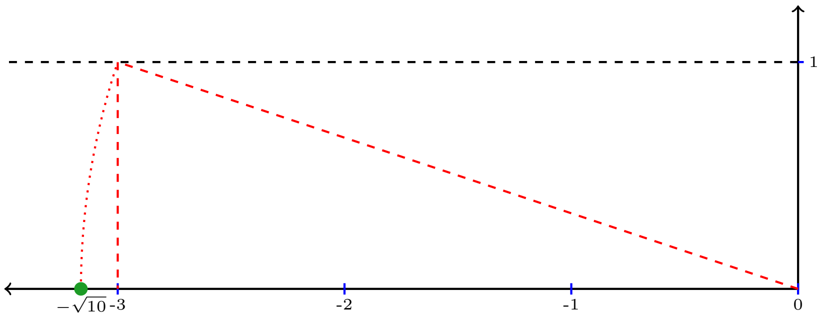
  $2,03003000300003... \in \mathbb{I}$; $\quad \sqrt[5]{-12} \in \mathbb{I}$; $\quad -8 \in \mathbb{Z}$; $\quad \sqrt{-36} \in \mathbb{C}$ (No es real)

Ejercicio 2: Representa los siguientes números sobre la recta real:

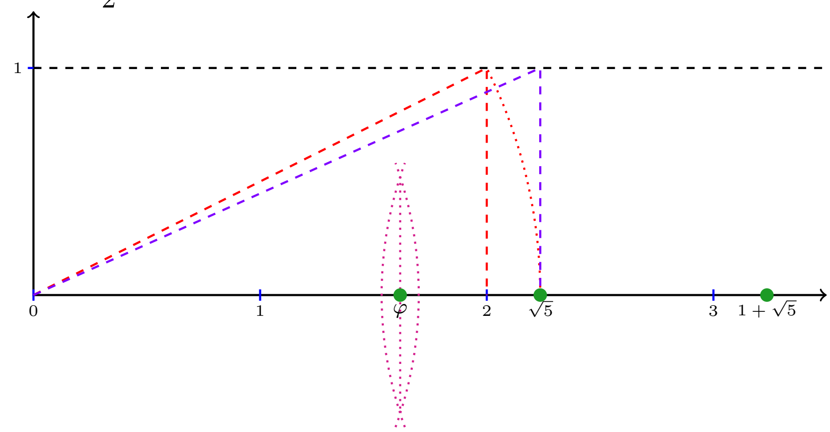
a) $\sqrt{6}$



b) $-\sqrt{10}$

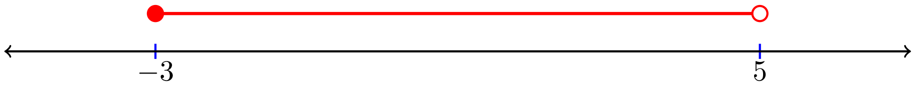


c) $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

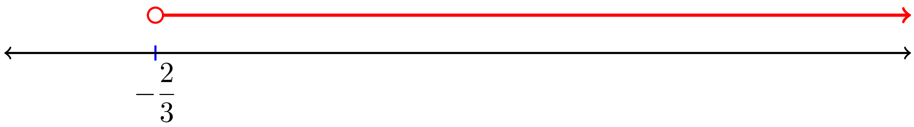


Ejercicio 3: Expresa los siguientes intervalos mediante el uso de desigualdades, y realiza su representación sobre la recta real.

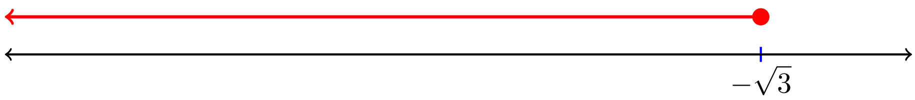
a) $[-3,5) \Rightarrow \{x \;/\; -3 \leq x < 5\}$



b) $\left(-\dfrac{2}{3},\infty\right) \Rightarrow \left\{x \;/\; -\dfrac{2}{3} < x\right\}$



c) $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right] \Rightarrow \{x \;/\; x \leq -\sqrt{3}\}$



Ejercicio 4: Transforma las siguientes desigualdades en intervalos.

a) $\{x \;/\; -2 < x \leq 8\} \Rightarrow x \in (-2,8]$

b) $\left\{x \;/\; x \geq -\dfrac{3}{5}\right\} \Rightarrow x \in \left[-\dfrac{3}{5},\infty\right)$

c) $\left\{x \;/\; -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}\right\} \Rightarrow x \in \left[-\sqrt{3},\sqrt{6}\right]$

Ejercicio 5: Opera:

a) $$\sqrt{27}-\frac{2}{5}\sqrt{48}+\frac{5\sqrt{75}}{3}=\sqrt{3^3}-\frac{2}{5}\sqrt{2^4\cdot 3}+\frac{5\sqrt{5^2\cdot 3}}{3}=3\sqrt{3}-\frac{2\cdot 2^2\sqrt{3}}{5}+\frac{5\cdot 5\sqrt{3}}{3}=$$
$$=\left(3-\frac{8}{5}+\frac{25}{3}\right)\cdot\sqrt{3}=\frac{194\sqrt{3}}{15}$$

b) $$\frac{\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[3]{4}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[5]{2^4}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[30]{\left(2^4\right)^6\cdot\left(2^2\right)^{10}}}{\sqrt[30]{2^{30}\cdot 2^{15}}}=\sqrt[30]{\frac{1}{2}}$$

c) $$\frac{2^{-2}\cdot 8^2\cdot\sqrt[3]{4}}{2^3\cdot 4^{-2}\div 2^{\frac{1}{2}}}=\frac{2^{-2}\cdot 2^6\cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2^3\cdot 2^{-4}\div 2^{\frac{1}{2}}}=2^{-2+6+\frac{2}{3}-3-(-4)+\frac{1}{2}}=2^{\frac{37}{6}}=2^6\sqrt[6]{2}$$

Ejercicio 6: Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales, simplificando el resultado cuando sea posible:

a) $$\frac{dea}{b^3c^2}\cdot\sqrt[5]{\frac{a^{12}b^7c^{15}}{d^8e^{13}}}=\frac{dea\cdot a^2bc^3}{b^3c^2\cdot de^2}\sqrt[5]{\frac{a^2b^2}{d^3e^3}}=\frac{a^3c}{b^2e}\sqrt[5]{\frac{a^2b^2}{d^3e^3}}$$

b) $$x\sqrt{x^3\sqrt{x^3\sqrt[3]{x^5}}}=x\sqrt{x^3\sqrt[6]{x^9\cdot x^5}}=x\sqrt{\sqrt[6]{x^{18}\cdot x^{14}}}=x\sqrt[12]{x^{32}}=x\cdot x^2\sqrt[12]{x^8}=x^3\sqrt[3]{x^2}$$

Ejercicio 7: Racionaliza las siguientes expresiones, simplificando el resultado cuando sea posible:

a) $\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \dfrac{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2}{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})} = \dfrac{4\cdot 3-2\cdot 2\cdot 3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+9\cdot 2}{4\cdot 3-9\cdot 2} =$

$\dfrac{12-12\sqrt{6}+18}{12-18} = -\dfrac{30-12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}-5$

b) $\dfrac{3xz}{y\sqrt[5]{x^2y^3z^4}} = \dfrac{3xz\sqrt[5]{x^3y^2z}}{y\sqrt[5]{x^2y^3z^4}\sqrt[5]{x^3y^2z}} = \dfrac{3xz\sqrt[5]{x^3y^2z}}{y\cdot xyz} = \dfrac{3\sqrt[5]{x^3y^2z}}{y^2}$

c) $\dfrac{3}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{3(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \dfrac{3(2+\sqrt{2})}{4-2} = \dfrac{6+3\sqrt{2}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{7}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \dfrac{(\sqrt{8}-\sqrt{7})(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})} = \dfrac{\sqrt{48}+\sqrt{40}-\sqrt{42}-\sqrt{35}}{6-5} =$

$= 4\sqrt{3}+2\sqrt{10}-\sqrt{42}-\sqrt{35}$

Ejercicio 8: Opera y simplifica:

a) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \dfrac{2-2\sqrt{6}+3-(2+2\sqrt{6}+3)}{2-3} =$

$= \dfrac{5-2\sqrt{6}-5-2\sqrt{6}}{-1} = 4\sqrt{6}$

b) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}} - \dfrac{5}{2\sqrt[3]{9}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} - \dfrac{5\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{3^2}\sqrt[3]{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{6} - \dfrac{5\sqrt[3]{3}}{6} = \dfrac{3\sqrt{3}-5\sqrt[3]{3}}{6}$

Ejercicio 9: Obtén sin calculadora los siguientes logaritmos:

a) $\log_2(32) = \log_2\left(2^5\right) = 5$

b) $\log_3\left(\dfrac{1}{81}\right) = \log_3\left(3^{-4}\right) = -4$

c) $\log_2(0,125) = \log_2\left(\dfrac{125}{1000}\right) = \log_2\left(\dfrac{1}{8}\right) = -3$

d) $\log(0,001) = \log\left(10^{-3}\right) = -3$

e) $\log_5\left(\sqrt{125}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\log_5\left(5^3\right) = \dfrac{3}{2}$

f) $\log_\pi 1 = 0$

Ejercicio 10: Sabiendo que $\log(2) \approx 0,30$, calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log\left(\dfrac{8}{5}\right) = \log\left(\dfrac{16}{10}\right) = \log\left(2^4\right) - \log(10) = 4 \cdot \log(2) - 1 = 1,20 - 1 = 0,20$

b) $\log\left(\sqrt{20}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \log(2 \cdot 10) = \dfrac{1}{2} \cdot \big(\log(2) + \log(10)\big) = \dfrac{0,30+1}{2} = 0,65$

c) $\log(0,005) = \log\left(5 \cdot 10^{-3}\right) = \log(5) + \log\left(10^{-3}\right) = \log\left(\dfrac{10}{2}\right) - 3 =$

$= \log(10) - \log(2) - 3 = 1 - 0,30 - 3 = -2,30$

d) $\log\left(\dfrac{40}{\sqrt{8}}\right) = \log(40) - \log\left(2^{\frac{3}{2}}\right) = \log(2^2) + \log(10) + \dfrac{3}{2} \cdot \log(2) =$

$= 2 \cdot 0,30 + 1 + \dfrac{3 \cdot 0,30}{2} = 2,05$

e) $\log_2(100) = \dfrac{\log(100)}{\log(2)} = \dfrac{2}{0,30} \approx 6,67$