Los números complejos

David Matellano

Departamento de Matemáticas. IES Ángel Corella. (Colmenar Viejo)

5 de marzo de 2020

índice de contenidos I

índice de contenidos II

Definición de la unidad imaginaria

Raíz de un número negativo

Definición de i

- Definimos la unidad imaginaria como la raíz cuadrada del número -1.

Definición de la unidad imaginaria

Raíz de un número negativo

Definición de i

- Definimos la unidad imaginaria como la raíz cuadrada del número -1.
- Así: $\boxed{i = \sqrt{-1}}$

Raíz cuadrada de un número negativo

Sea un número negativo $-n$

- Sea $\sqrt{-n}$

Raíz cuadrada de un número negativo

Sea un número negativo $-n$

- Sea $\sqrt{-n}$
- Podemos obtener: $\sqrt{-n} = \sqrt{n \cdot (-1)} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{n} \cdot i$

Raíz cuadrada de un número negativo

Sea un número negativo $-n$

- Sea $\sqrt{-n}$
- Podemos obtener: $\sqrt{-n} = \sqrt{n \cdot (-1)} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{n} \cdot i$
- Ejemplo: $\sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot (-1)} = \sqrt{16} \cdot i = 4i$

Números imaginarios

Números imaginarios

- Se define un número imaginario y como el producto de un número real b por la unidad imaginaria i

Números imaginarios

Números imaginarios

- Se define un número imaginario y como el producto de un número real b por la unidad imaginaria i
- $y = b \cdot i = bi$

Números imaginarios

Números imaginarios

- Se define un número imaginario y como el producto de un número real b por la unidad imaginaria i
- $y = b \cdot i = bi$
- Se puede obtener a partir de la siguiente raíz:

Números imaginarios

Números imaginarios

- Se define un número imaginario y como el producto de un número real b por la unidad imaginaria i
- $y = b \cdot i = bi$
- Se puede obtener a partir de la siguiente raíz:
- $y = \sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2}\sqrt{-1} = b \cdot i$

Números complejos

Definición de número complejo

Definición

- Se define como número complejo z a la suma de un número real a y un número imaginario $b \cdot i \Rightarrow z = a + bi$

Números complejos

Definición de número complejo

Definición

- Se define como número complejo z a la suma de un número real a y un número imaginario $b \cdot i \Rightarrow z = a + bi$
- Se define su parte real como: $Re(z) = a$

Números complejos

Definición de número complejo

Definición

- Se define como número complejo z a la suma de un número real a y un número imaginario $b \cdot i \Rightarrow z = a + bi$
- Se define su parte real como: $Re(z) = a$
- Se define su parte imaginaria como: $Im(z) = b$

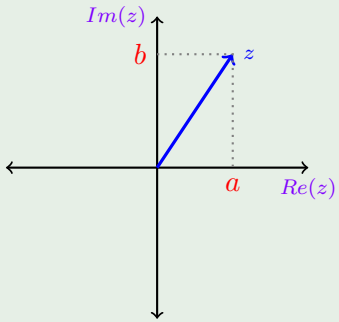
Números complejos

Definición de número complejo

Definición

- Se define como número complejo z a la suma de un número real a y un número imaginario $b \cdot i \Rightarrow z = a + bi$
- Se define su parte real como: $Re(z) = a$
- Se define su parte imaginaria como: $Im(z) = b$
- Podemos representar z en el plano complejo:

Figuras

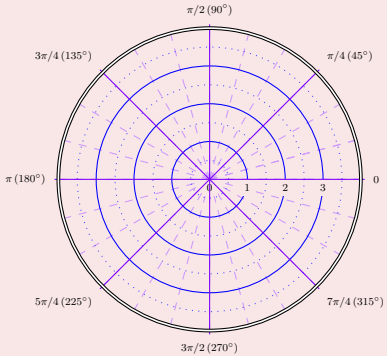


Número complejo en forma polar

Forma polar

- Podemos definir z a partir de:

Figuras:

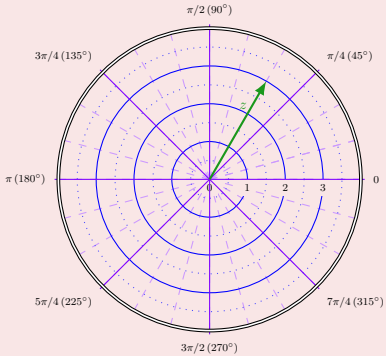


Número complejo en forma polar

Forma polar

- Podemos definir z a partir de:
  - Su módulo: $|z| \equiv r$

Figuras:

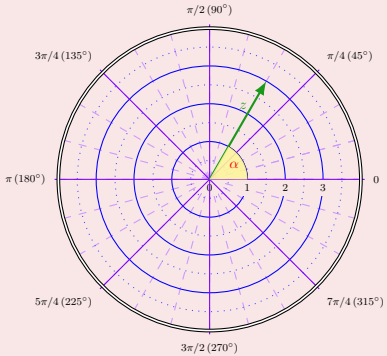


Número complejo en forma polar

Forma polar

- Podemos definir z a partir de:
  - Su módulo: $|z| \equiv r$
  - Su argumento: α

Figuras:

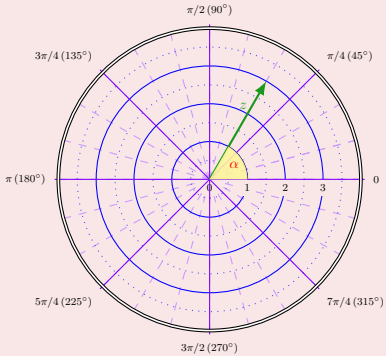


Número complejo en forma polar

Forma polar

- Podemos definir z a partir de:
  - Su módulo: $|z| \equiv r$
  - Su argumento: α
- Así: $z = r_\alpha$

Figuras:

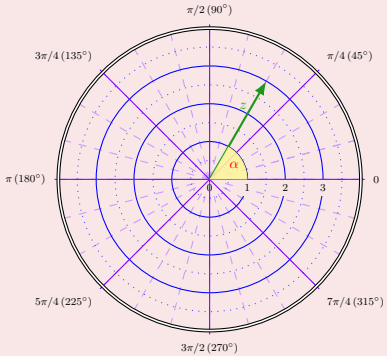


Número complejo en forma polar

Forma polar

- Podemos definir z a partir de:
  - Su módulo: $|z| \equiv r$
  - Su argumento: α
- Así: $z = r_\alpha$
- Ejemplo$\Rightarrow$ El número de la figura es $z = 3_{60^\circ} = 3_{\frac{\pi}{3}}$

Figuras:



Paso de forma binomial a polar y viceversa

Paso de forma binomial a polar

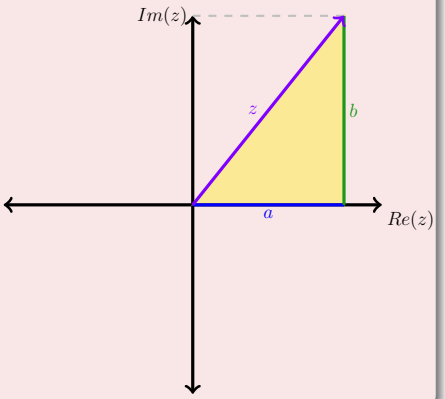
Paso de forma binomial a polar y viceversa

Paso de forma binomial a polar

- Sea $z = a + bi$:

Paso de polar a binomial

Figuras



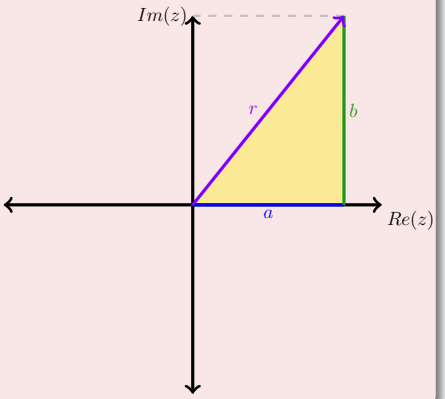
Paso de forma binomial a polar y viceversa

Paso de forma binomial a polar

- Sea $z = a + bi$:
- Cálculo de su módulo: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Paso de polar a binomial

Figuras



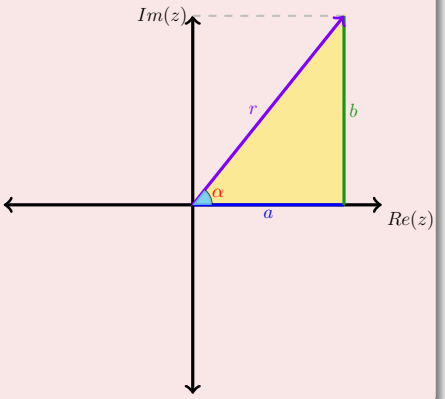
Paso de forma binomial a polar y viceversa

Paso de forma binomial a polar

- Sea $z = a + bi$:
- Cálculo de su módulo: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Obtención de su argumento: $\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Paso de polar a binomial

Figuras



Paso de forma binomial a polar y viceversa

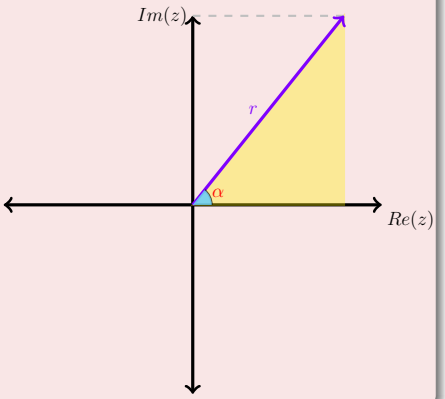
Paso de forma binomial a polar

- Sea $z = a + bi$:
- Cálculo de su módulo: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Obtención de su argumento: $\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Paso de polar a binomial

- Sea $z = r_\alpha$:

Figuras



Paso de forma binomial a polar y viceversa

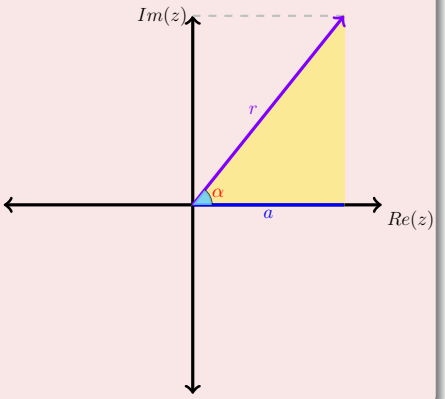
Paso de forma binomial a polar

- Sea $z = a + bi$:
- Cálculo de su módulo: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Obtención de su argumento: $\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Paso de polar a binomial

- Sea $z = r_\alpha$:
- $a = r \cdot \cos\alpha$

Figuras



Paso de forma binomial a polar y viceversa

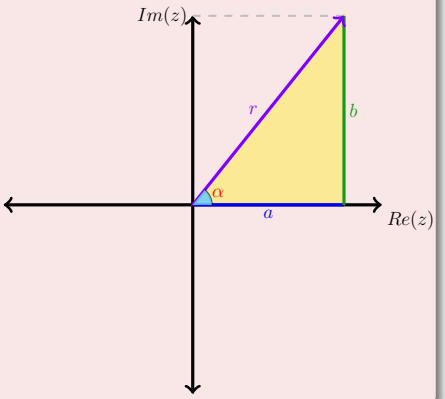
Paso de forma binomial a polar

- Sea $z = a + bi$:
- Cálculo de su módulo: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Obtención de su argumento: $\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Paso de polar a binomial

- Sea $z = r_\alpha$:
- $a = r \cdot \cos\alpha$
- $b = r \cdot \operatorname{sen}\alpha$

Figuras



Forma trigonométrica

Definición

- Como vimos en la conversión polar $\leftrightarrow$ binomial: 9

Forma trigonométrica

Definición

- Como vimos en la conversión polar $\leftrightarrow$ binomial: 9
  - $a = r\cos\alpha \quad b = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$

Forma trigonométrica

Definición

- Como vimos en la conversión polar $\leftrightarrow$ binomial: 9
  - $a = r\cos\alpha \quad b = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$
- Podemos definir z en forma trigonométrica de la siguiente manera:

Forma trigonométrica

Definición

- Como vimos en la conversión polar $\leftrightarrow$ binomial: 9
  - $a = r\cos\alpha \quad b = r\operatorname{sen}\alpha$
- Podemos definir z en forma trigonométrica de la siguiente manera:
- $z = r \cdot (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$

Fórmula de Euler

Fórmula de Euler

- $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$

Forma exponencial de z

Fórmula de Euler

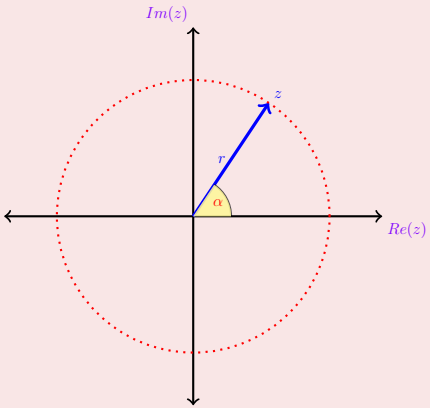
- $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$

Forma exponencial de z

- Así, cualquier complejo r_α se puede expresar en su forma exponencial:

Identidad de Euler

Figuras



Fórmula de Euler
Forma exponencial de z

Fórmula de Euler

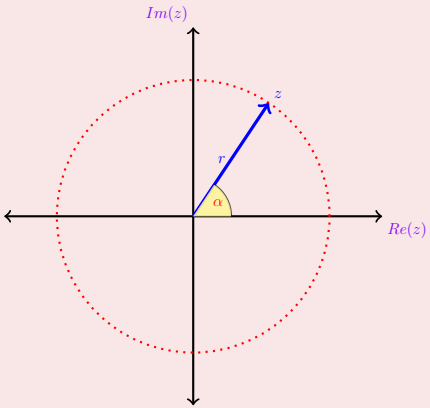
- $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$

Forma exponencial de z

- Así, cualquier complejo r_α se puede expresar en su forma exponencial:
- $z = r_\alpha = re^{i\alpha}$

Identidad de Euler

Figuras



Fórmula de Euler
Forma exponencial de z

Fórmula de Euler

- $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$

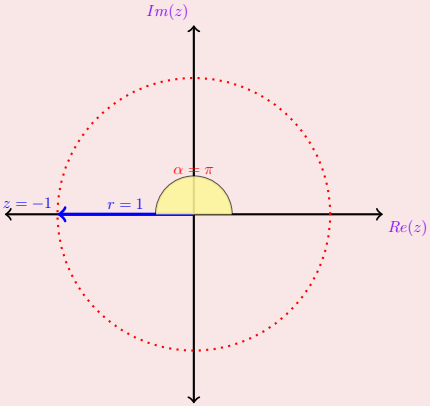
Forma exponencial de z

- Así, cualquier complejo r_α se puede expresar en su forma exponencial:
- $z = r_\alpha = re^{i\alpha}$

Identidad de Euler

- Tomando $z = -1$ y operando obtenemos:

Figuras



Fórmula de Euler
Forma exponencial de z

Fórmula de Euler

- $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$

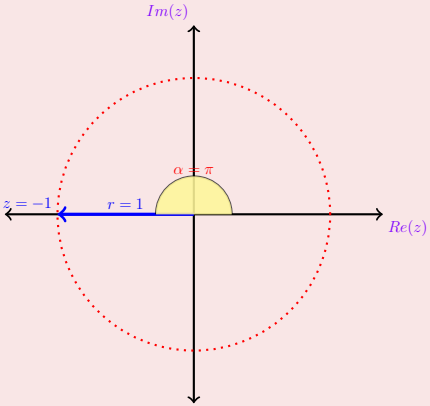
Forma exponencial de z

- Así, cualquier complejo r_α se puede expresar en su forma exponencial:
- $z = r_\alpha = re^{i\alpha}$

Identidad de Euler

- Tomando $z = -1$ y operando obtenemos:
- $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$

Figuras



Elemento opuesto de z

Definición

Opuesto de z

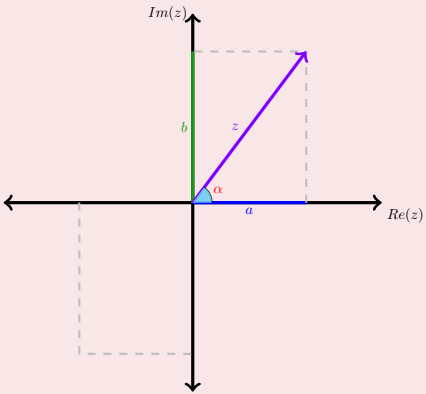
Elemento opuesto de z

Definición

Opuesto de z

- Sea $z = a + bi$:

Figuras



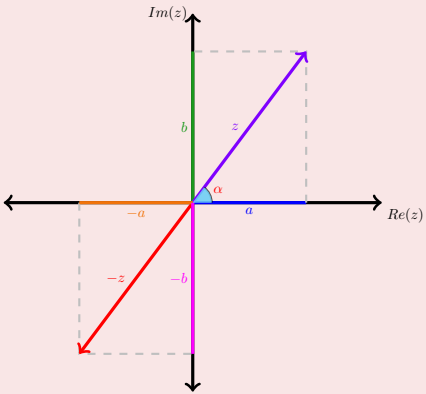
Elemento opuesto de z

Definición

Opuesto de z

- Sea $z = a + bi$:
- Su elemento opuesto será: $-z = -a - bi$

Figuras



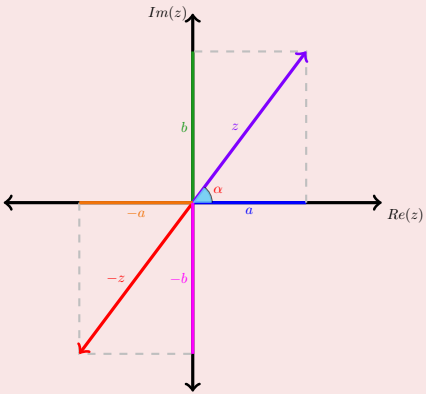
Elemento opuesto de z

Definición

Opuesto de z

- Sea $z = a + bi$:
- Su elemento opuesto será: $-z = -a - bi$
- Se cumple así:

Figuras



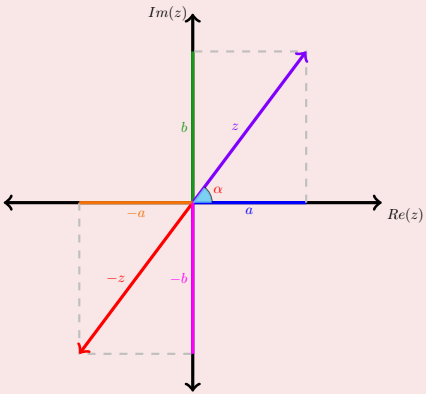
Elemento opuesto de z

Definición

Opuesto de z

- Sea $z = a + bi$:
- Su elemento opuesto será: $-z = -a - bi$
- Se cumple así:
  - $Re(z) = -Re(-z)$

Figuras



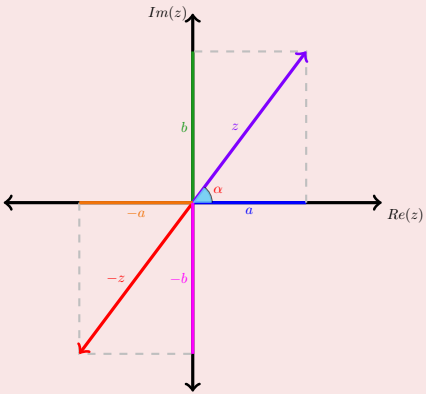
Elemento opuesto de z

Definición

Opuesto de z

- Sea $z = a + bi$:
- Su elemento opuesto será: $-z = -a - bi$
- Se cumple así:
  - $Re(z) = -Re(-z)$
  - $Im(z) = -Im(-z)$

Figuras



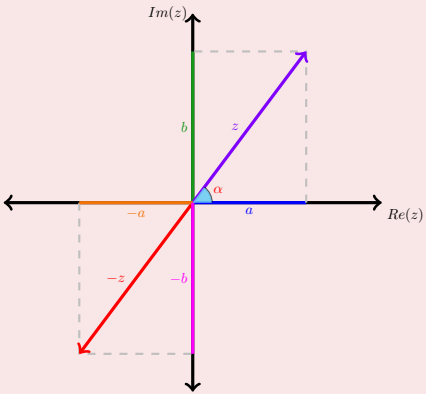
Elemento opuesto de z

Definición

Opuesto de z

- Sea $z = a + bi$:
- Su elemento opuesto será: $-z = -a - bi$
- Se cumple así:
  - $Re(z) = -Re(-z)$
  - $Im(z) = -Im(-z)$
  - $|z| = |-z| = r$

Figuras



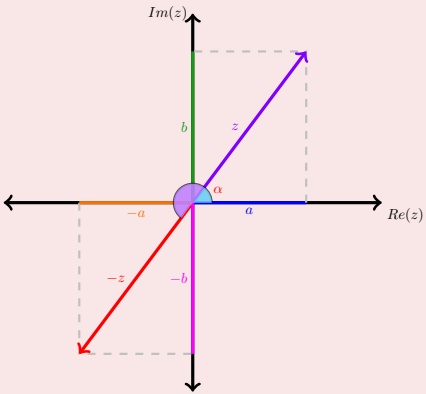
Elemento opuesto de z

Definición

Opuesto de z

- Sea $z = a + bi$:
- Su elemento opuesto será: $-z = -a - bi$
- Se cumple así:
  - $Re(z) = -Re(-z)$
  - $Im(z) = -Im(-z)$
  - $|z| = |-z| = r$
  - $arg(-z) = arg(z) + \pi$

Figuras



Complejo conjugado

Definición

Definición de complejo conjugado

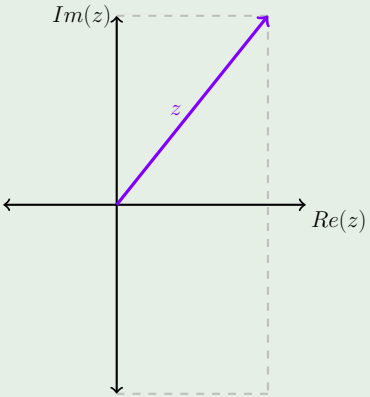
Complejo conjugado

Definición

Definición de complejo conjugado

- Sea un número complejo $z = a + bi$:

Figuras:



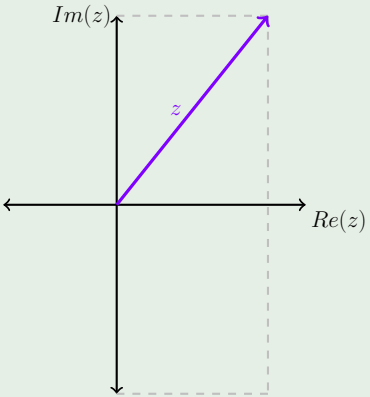
Complejo conjugado

Definición

Definición de complejo conjugado

- Sea un número complejo $z = a + bi$:
- Se define su complejo conjugado $\overline{z}$ como:

Figuras:



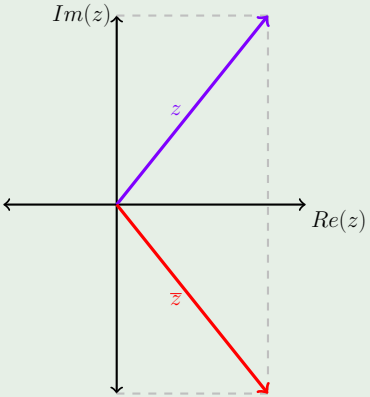
Complejo conjugado

Definición

Definición de complejo conjugado

- Sea un número complejo $z = a + bi$:
- Se define su complejo conjugado $\overline{z}$ como:
- $\overline{z} = a - bi$

Figuras:



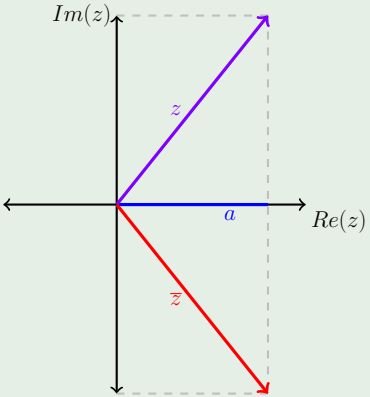
Complejo conjugado

Definición

Definición de complejo conjugado

- Sea un número complejo $z = a + bi$:
- Se define su complejo conjugado $\overline{z}$ como:
- $\overline{z} = a - bi$
  - $Re(z) = Re(\overline{z})$

Figuras:



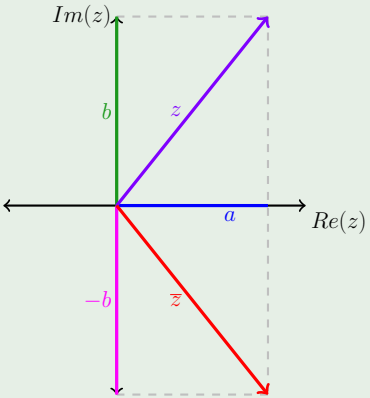
Complejo conjugado

Definición

Definición de complejo conjugado

- Sea un número complejo $z = a + bi$:
- Se define su complejo conjugado $\overline{z}$ como:
- $\overline{z} = a - bi$
  - $Re(z) = Re(\overline{z})$
  - $Im(z) = -Im(\overline{z})$

Figuras:



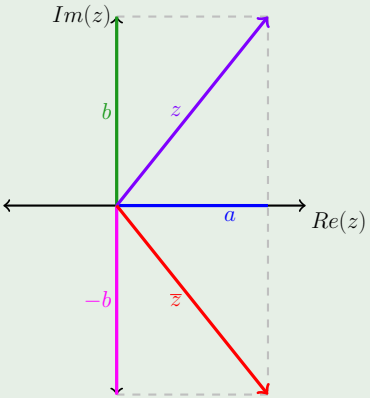
Complejo conjugado

Definición

Definición de complejo conjugado

- Sea un número complejo $z = a + bi$:
- Se define su complejo conjugado $\overline{z}$ como:
- $\overline{z} = a - bi$
  - $Re(z) = Re(\overline{z})$
  - $Im(z) = -Im(\overline{z})$
- En forma polar:

Figuras:



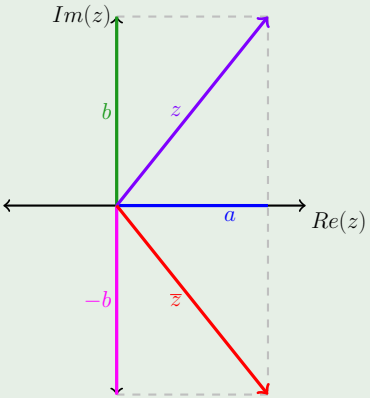
Complejo conjugado

Definición

Definición de complejo conjugado

- Sea un número complejo $z = a + bi$:
- Se define su complejo conjugado $\overline{z}$ como:
- $\overline{z} = a - bi$
  - $Re(z) = Re(\overline{z})$
  - $Im(z) = -Im(\overline{z})$
- En forma polar:
  - $|z| = |\overline{z}|$

Figuras:



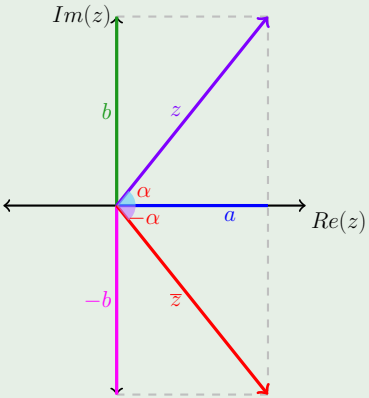
Complejo conjugado

Definición

Definición de complejo conjugado

- Sea un número complejo $z = a + bi$:
- Se define su complejo conjugado $\overline{z}$ como:
- $\overline{z} = a - bi$
  - $Re(z) = Re(\overline{z})$
  - $Im(z) = -Im(\overline{z})$
- En forma polar:
  - $|z| = |\overline{z}|$
  - $arg(z) = -arg(\overline{z})$

Figuras:



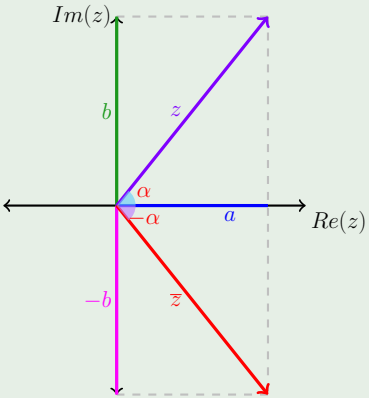
Complejo conjugado

Definición

Definición de complejo conjugado

- Sea un número complejo $z = a + bi$:
- Se define su complejo conjugado $\overline{z}$ como:
- $\overline{z} = a - bi$
  - $Re(z) = Re(\overline{z})$
  - $Im(z) = -Im(\overline{z})$
- En forma polar:
  - $|z| = |\overline{z}|$
  - $arg(z) = -arg(\overline{z})$
- Así: $\overline{z} = |z|_{-\alpha} = r_{-\alpha}$

Figuras:



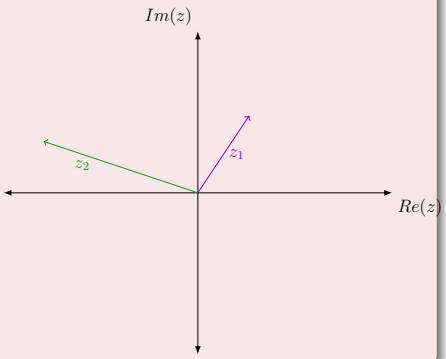
Operaciones con números complejos

Suma y resta en forma binomial

Suma de dos complejos

- Sean los complejos z_1 y z_2:

Figuras



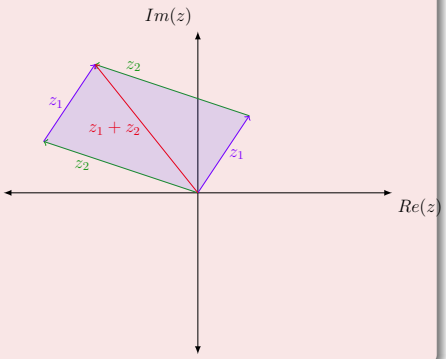
Operaciones con números complejos

Suma y resta en forma binomial

Suma de dos complejos

- Sean los complejos z_1 y z_2:
- Para realizar $z_1 + z_2$ utilizamos la *regla del paralelogramo*

Figuras



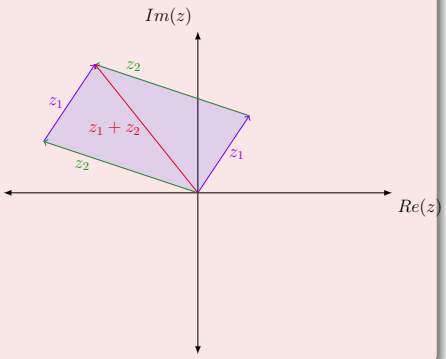
Operaciones con números complejos

Suma y resta en forma binomial

Suma de dos complejos

- Sean los complejos z_1 y z_2:
- Para realizar $z_1 + z_2$ utilizamos la *regla del paralelogramo*
- En forma binomial obtendremos:

Figuras



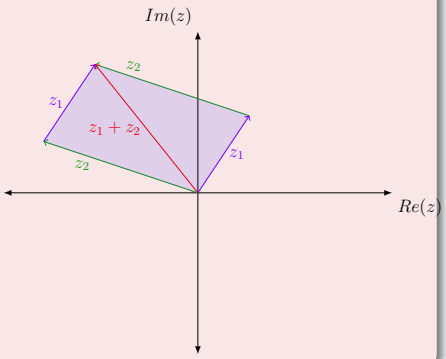
Operaciones con números complejos

Suma y resta en forma binomial

Suma de dos complejos

- Sean los complejos z_1 y z_2:
- Para realizar $z_1 + z_2$ utilizamos la *regla del paralelogramo*
- En forma binomial obtendremos:
  - $z_1 = a_1 + b_1 i \quad z_2 = a_2 + b_2 i$

Figuras



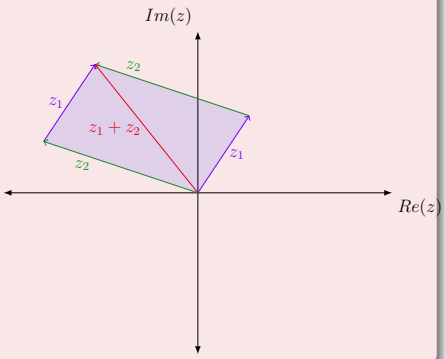
Operaciones con números complejos

Suma y resta en forma binomial

Suma de dos complejos

- Sean los complejos z_1 y z_2:
- Para realizar $z_1 + z_2$ utilizamos la *regla del paralelogramo*
- En forma binomial obtendremos:
  - $z_1 = a_1 + b_1 i \quad z_2 = a_2 + b_2 i$
  - $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$

Figuras



Operaciones con números complejos

Suma y resta en forma binomial

Suma de dos complejos

- Sean los complejos z_1 y z_2:
- Para realizar $z_1 + z_2$ utilizamos la *regla del paralelogramo*
- En forma binomial obtendremos:
  - $z_1 = a_1 + b_1 i \quad z_2 = a_2 + b_2 i$
  - $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$
- En la figura:

Figuras

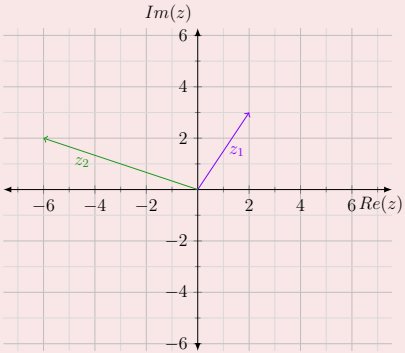
Operaciones con números complejos

Suma y resta en forma binomial

Suma de dos complejos

- Sean los complejos z_1 y z_2:
- Para realizar $z_1 + z_2$ utilizamos la *regla del paralelogramo*
- En forma binomial obtendremos:
  - $z_1 = a_1 + b_1 i \quad z_2 = a_2 + b_2 i$
  - $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$
- En la figura:
  - $z_1 = 2 + 3i \quad z_2 = -6 + 2i$

Figuras



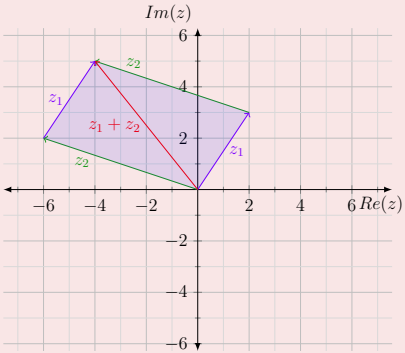
Operaciones con números complejos

Suma y resta en forma binomial

Suma de dos complejos

- Sean los complejos z_1 y z_2:
- Para realizar $z_1 + z_2$ utilizamos la *regla del paralelogramo*
- En forma binomial obtendremos:
  - $z_1 = a_1 + b_1 i \quad z_2 = a_2 + b_2 i$
  - $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$
- En la figura:
  - $z_1 = 2 + 3i \quad z_2 = -6 + 2i$
  - $z_1 + z_2 = (2 - 6) + (3 + 2)i = -4 + 5i$

Figuras



Producto de complejos

En forma binomial

Producto en forma binomial

Producto de complejos

En forma binomial

Producto en forma binomial

- Sean $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$

Producto de complejos

En forma binomial

Producto en forma binomial

- Sean $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$
- Su producto será: $p = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i)$

Producto de complejos

En forma binomial

Producto en forma binomial

- Sean $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$
- Su producto será: $p = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i)$
- Aplicando la propiedad distributiva:

Producto de complejos

En forma binomial

Producto en forma binomial

- Sean $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$
- Su producto será: $p = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i)$
- Aplicando la propiedad distributiva:
- $p = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

Producto de complejos

En forma binomial

Producto en forma binomial

- Sean $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$
- Su producto será: $p = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i)$
- Aplicando la propiedad distributiva:
- $p = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$
- Ejemplo:
  $(2 + 3i) \cdot (3 - 4i) = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 4i + 3 \cdot 3i - 3 \cdot 4 \cdot i^2 = 6 + 12 + 9i - 8i = 18 + i$

Producto de complejos

En forma binomial

Producto en forma binomial

- Sean $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$
- Su producto será: $p = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i)$
- Aplicando la propiedad distributiva:
- $p = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$
- Ejemplo:
  $(2 + 3i) \cdot (3 - 4i) = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 4i + 3 \cdot 3i - 3 \cdot 4 \cdot i^2 = 6 + 12 + 9i - 8i = 18 + i$

Un resultado muy importante:

- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

Producto de complejos

En forma binomial

Producto en forma binomial

- Sean $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$
- Su producto será: $p = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i)$
- Aplicando la propiedad distributiva:
- $p = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$
- Ejemplo:
  $(2 + 3i) \cdot (3 - 4i) = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 4i + 3 \cdot 3i - 3 \cdot 4 \cdot i^2 = 6 + 12 + 9i - 8i = 18 + i$

Un resultado muy importante:

- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
- Comprobación: $\Rightarrow z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

Producto de complejos
En forma polar

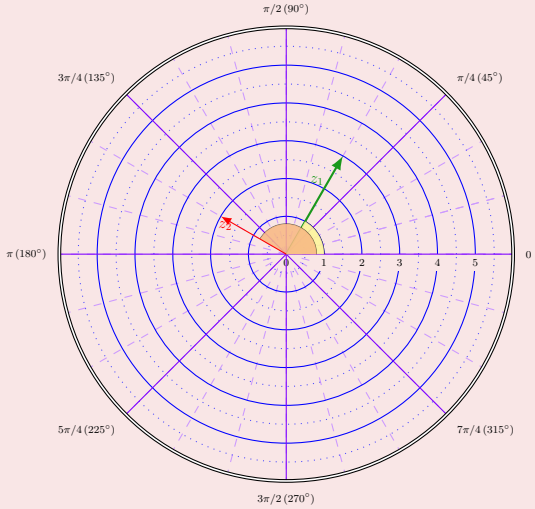
Producto de complejos en forma polar

Producto de complejos
En forma polar

Producto de complejos en forma polar

- Sean $z_1 = r_{1\alpha_1}$ y $z_2 = r_{2\alpha_2}$

Figuras

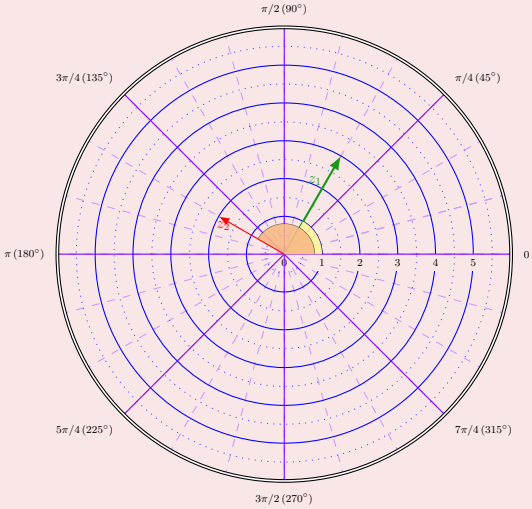


Producto de complejos
En forma polar

Producto de complejos en forma polar

- Sean $z_1 = r_{1\alpha_1}$ y $z_2 = r_{2\alpha_2}$
- $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2)_{\alpha_1+\alpha_2}$

Figuras

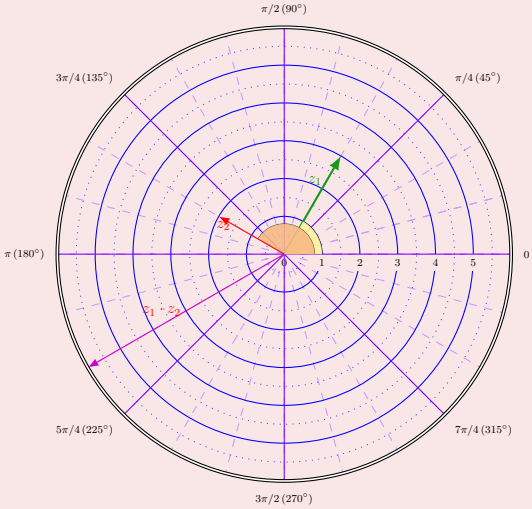


Producto de complejos
En forma polar

Producto de complejos en forma polar

- Sean $z_1 = r_{1\alpha_1}$ y $z_2 = r_{2\alpha_2}$
- $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2)_{\alpha_1+\alpha_2}$
- El módulo es el producto de los mismos.

Figuras

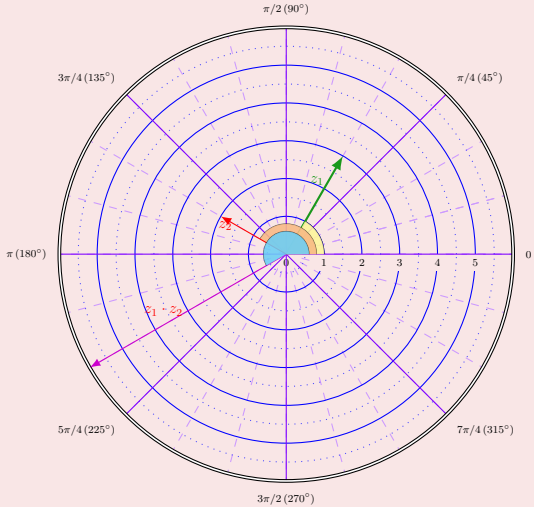


Producto de complejos
En forma polar

Producto de complejos en forma polar

- Sean $z_1 = r_{1\alpha_1}$ y $z_2 = r_{2\alpha_2}$
- $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2)_{\alpha_1+\alpha_2}$
- El módulo es el producto de los mismos.
- Los argumentos se suman.

Figuras

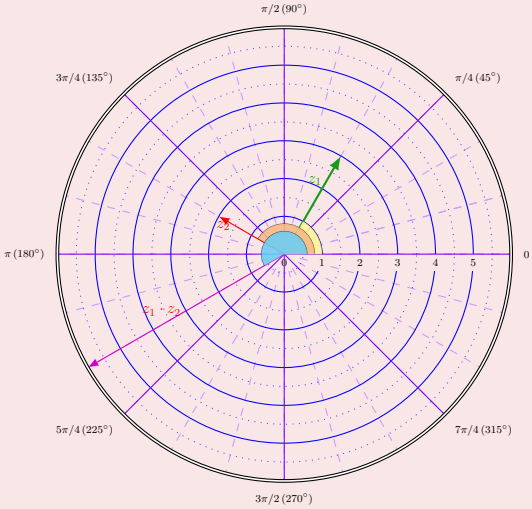


Producto de complejos
En forma polar

Producto de complejos en forma polar

- Sean $z_1 = r_{1\alpha_1}$ y $z_2 = r_{2\alpha_2}$
- $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2)_{\alpha_1+\alpha_2}$
- El módulo es el producto de los mismos.
- Los argumentos se suman.
- Ejemplo:
  $3_{\frac{\pi}{3}} \cdot 2_{\frac{5\pi}{6}} = 6_{\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}} = 6_{\frac{7\pi}{6}}$

Figuras



Demostración del producto de dos complejos

Utilicemos la forma exponencial:

Demostración del producto de dos complejos

Utilicemos la forma exponencial:

- $z_1 = r_{1_{\alpha_1}} \Rightarrow z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$

Demostración del producto de dos complejos

Utilicemos la forma exponencial:

- $z_1 = r_{1_{\alpha_1}} \Rightarrow z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$
- $z_2 = r_{2_{\alpha_2}} \Rightarrow z_2 = r_2 e^{i\alpha_2}$

Demostración del producto de dos complejos

Utilicemos la forma exponencial:

- $z_1 = r_{1_{\alpha_1}} \Rightarrow z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$
- $z_2 = r_{2_{\alpha_2}} \Rightarrow z_2 = r_2 e^{i\alpha_2}$
- $z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\alpha_1} \cdot r_2 e^{i\alpha_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}$

Cociente de complejos

En forma binomial

Cociente de dos complejos en forma binomial

Cociente de complejos

En forma binomial

Cociente de dos complejos en forma binomial

- Sea $C = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$

Ejemplo:

Cociente de complejos

En forma binomial

Cociente de dos complejos en forma binomial

- Sea $C = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$
- Multiplicamos y dividimos por $\overline{z_2}$

Ejemplo:

Cociente de complejos

En forma binomial

Cociente de dos complejos en forma binomial

- Sea $C = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$
- Multiplicamos y dividimos por $\overline{z_2}$
- $C = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{r_2^2}$

Ejemplo:

Cociente de complejos

En forma binomial

Cociente de dos complejos en forma binomial

- Sea $C = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$
- Multiplicamos y dividimos por $\overline{z_2}$
- $C = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{r_2^2}$

Ejemplo:

- $C = \dfrac{2 + 3i}{3 - 4i}$

Cociente de complejos

En forma binomial

Cociente de dos complejos en forma binomial

- Sea $C = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$
- Multiplicamos y dividimos por $\overline{z_2}$
- $C = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{r_2^2}$

Ejemplo:

- $C = \dfrac{2 + 3i}{3 - 4i}$
- $C = \dfrac{(2 + 3i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)}$

Cociente de complejos

En forma binomial

Cociente de dos complejos en forma binomial

- Sea $C = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$
- Multiplicamos y dividimos por $\overline{z_2}$
- $C = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{r_2^2}$

Ejemplo:

- $C = \dfrac{2 + 3i}{3 - 4i}$
- $C = \dfrac{(2 + 3i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)}$
- $C = \dfrac{6 - 12 + 9i + 8i}{9 + 16}$

Cociente de complejos

En forma binomial

Cociente de dos complejos en forma binomial

- Sea $C = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$
- Multiplicamos y dividimos por $\overline{z_2}$
- $C = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{r_2^2}$

Ejemplo:

- $C = \dfrac{2 + 3i}{3 - 4i}$
- $C = \dfrac{(2 + 3i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)}$
- $C = \dfrac{6 - 12 + 9i + 8i}{9 + 16}$
- $C = \dfrac{-6 + 17i}{25}$

Cociente de complejos
En forma polar

Cociente en forma polar

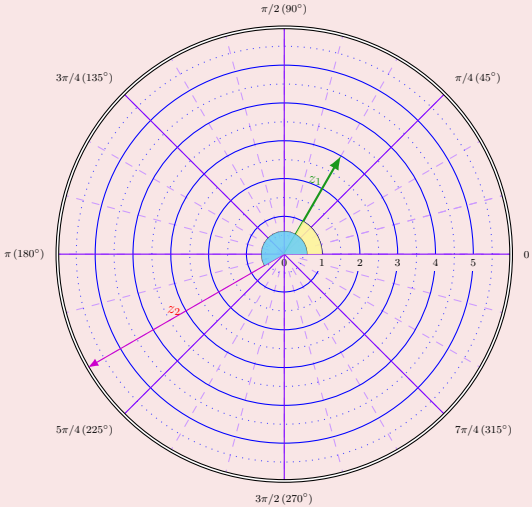
Cociente de complejos
En forma polar

Cociente en forma polar

- Sean $z_1 = r_{1\alpha_1}$ y $z_2 = r_{2\alpha_2}$

Ejemplo

Figuras



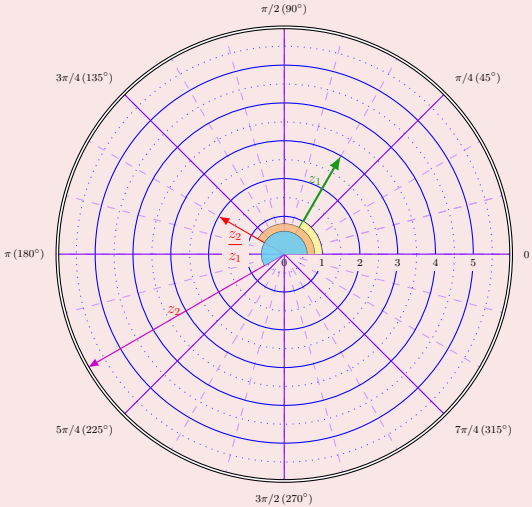
Cociente de complejos
En forma polar

Cociente en forma polar

- Sean $z_1 = r_{1\alpha_1}$ y $z_2 = r_{2\alpha_2}$
- $C = \dfrac{z_2}{z_1} = \left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)_{\alpha_2 - \alpha_1}$

Ejemplo

Figuras



Cociente de complejos
En forma polar

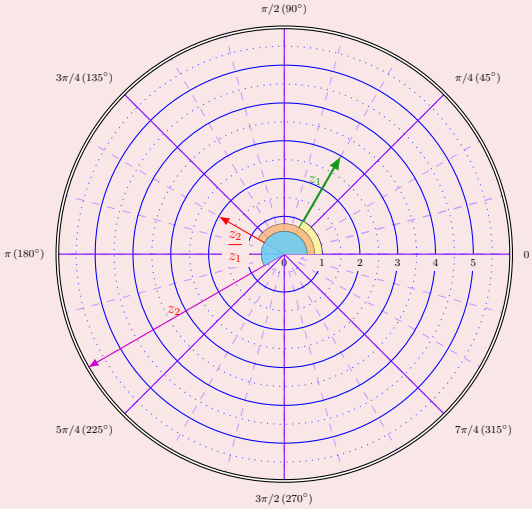
Cociente en forma polar

- Sean $z_1 = r_{1\alpha_1}$ y $z_2 = r_{2\alpha_2}$
- $C = \dfrac{z_2}{z_1} = \left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)_{\alpha_2-\alpha_1}$

Ejemplo

- $z_1 = 3_{\frac{\pi}{3}}; \quad z_2 = 6_{\frac{7\pi}{6}}$

Figuras



Cociente de complejos
En forma polar

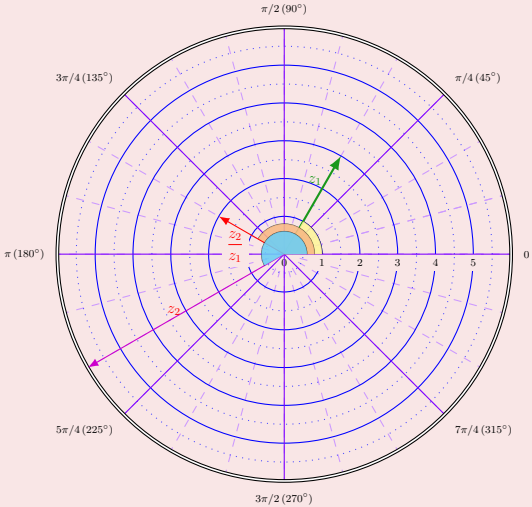
Cociente en forma polar

- Sean $z_1 = r_{1\alpha_1}$ y $z_2 = r_{2\alpha_2}$
- $C = \dfrac{z_2}{z_1} = \left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)_{\alpha_2 - \alpha_1}$

Ejemplo

- $z_1 = 3_{\frac{\pi}{3}}; \quad z_2 = 6_{\frac{7\pi}{6}}$
- $C = \dfrac{z_2}{z_1} = \left(\dfrac{6}{3}\right)_{\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{3}} = 2_{\frac{5\pi}{6}}$

Figuras



Demostración del cociente de dos complejos

Es muy similar a la vista para el producto: (3)

Demostración del cociente de dos complejos

Es muy similar a la vista para el producto: (3)

- $z_1 = r_{1_{\alpha_1}} \Rightarrow z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$

Demostración del cociente de dos complejos

Es muy similar a la vista para el producto: (3)

- $z_1 = r_{1\alpha_1} \Rightarrow z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$
- $z_2 = r_{2\alpha_2} \Rightarrow z_2 = r_2 e^{i\alpha_2}$

Demostración del cociente de dos complejos

Es muy similar a la vista para el producto: (3)

- $z_1 = r_{1\alpha_1} \Rightarrow z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$
- $z_2 = r_{2\alpha_2} \Rightarrow z_2 = r_2 e^{i\alpha_2}$
- $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{r_2 e^{i\alpha_2}}{r_1 e^{i\alpha_1}} = \dfrac{r_2}{r_1} e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)}$

Raíces enésimas de z

Raíces enésimas de z

- Sea $z = re^{i\alpha}$

Raíces enésimas de z

- Sea $z = re^{i\alpha}$
- Cualquier complejo z no nulo tiene n raíces enésimas cuyos argumentos $\in [0, 2\pi]$

Raíces enésimas de z

- Sea $z = re^{i\alpha}$
- Cualquier complejo z no nulo tiene n raíces enésimas cuyos argumentos $\in [0, 2\pi]$
- Dichas raíces son:

Raíces enésimas de z

- Sea $z = re^{i\alpha}$
- Cualquier complejo z no nulo tiene n raíces enésimas cuyos argumentos $\in [0, 2\pi]$
- Dichas raíces son:
- $$\sqrt[n]{re^{i\alpha}} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\alpha}{n}} \\ \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+1\cdot\frac{2\pi}{n}\right)} \\ \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+2\cdot\frac{2\pi}{n}\right)} \\ \vdots \\ \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+(n-1)\cdot\frac{2\pi}{n}\right)} \end{cases}$$

Raíces enésimas de z

- Sea $z = re^{i\alpha}$
- Cualquier complejo z no nulo tiene n raíces enésimas cuyos argumentos $\in [0, 2\pi]$
- Dichas raíces son:
- $\sqrt[n]{re^{i\alpha}} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\alpha}{n}} \\ \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+1\cdot\frac{2\pi}{n}\right)} \\ \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+2\cdot\frac{2\pi}{n}\right)} \\ \vdots \\ \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+(n-1)\cdot\frac{2\pi}{n}\right)} \end{cases}$
- Sus afijos forman un polígono regular de n lados si $n \geq 3$

Raíz enésima de un número complejo

Veamos un ejemplo:

Ejemplo

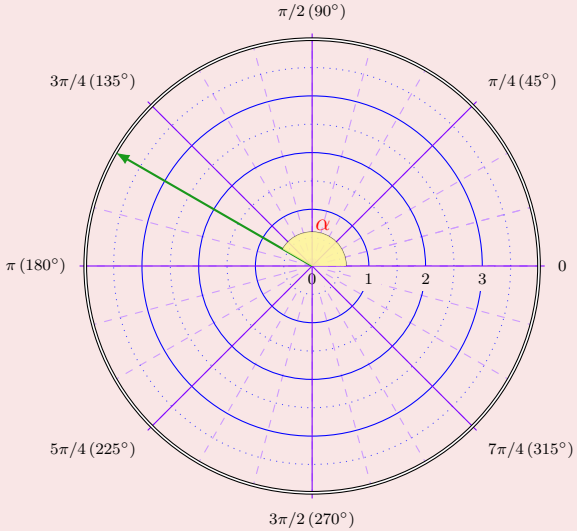
Raíz enésima de un número complejo

Veamos un ejemplo:

Ejemplo

- Sea $z = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Figuras



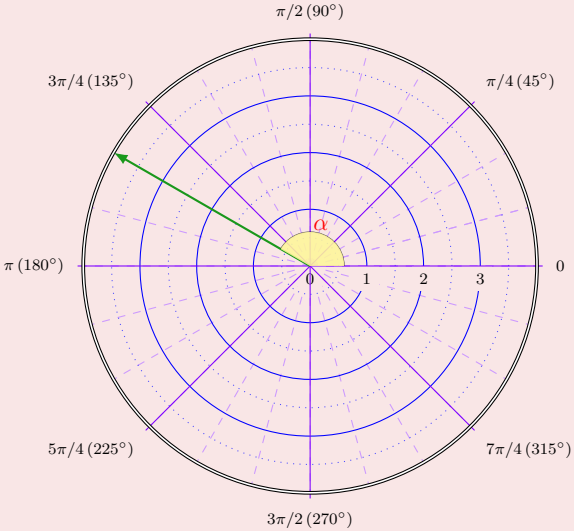
Raíz enésima de un número complejo

Veamos un ejemplo:

Ejemplo

- Sea $z = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$
- Calculemos $\sqrt[5]{z}$

Figuras



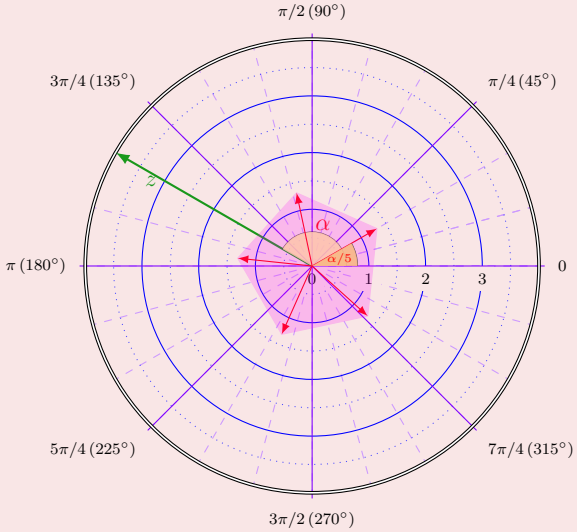
Raíz enésima de un número complejo

Veamos un ejemplo:

Ejemplo

- Sea $z = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$
- Calculemos $\sqrt[5]{z}$
- $$\sqrt[5]{z} = \begin{cases} \sqrt[5]{4}e^{i\frac{\cancel{5}\pi}{\cancel{5}\cdot 6}} \\ \sqrt[5]{4}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{5}\right)} \\ \sqrt[5]{4}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{5}\right)} \\ \sqrt[5]{4}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{6\pi}{5}\right)} \\ \sqrt[5]{4}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{8\pi}{5}\right)} \end{cases}$$

Figuras



Raíz enésima de un número complejo

Veamos un ejemplo:

Ejemplo

- Sea $z = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$
- Calculemos $\sqrt[5]{z}$
- $$\sqrt[5]{z} = \begin{cases} \sqrt[5]{4}e^{i\frac{\cancel{5}\pi}{\cancel{5}\cdot 6}} \\ \sqrt[5]{4}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{5}\right)} \\ \sqrt[5]{4}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{5}\right)} \\ \sqrt[5]{4}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{6\pi}{5}\right)} \\ \sqrt[5]{4}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{8\pi}{5}\right)} \end{cases}$$
- Sus afijos forman un pentágono regular.

Figuras