CONSOLIDACIÓN

Ficha *Sucesiones*

1. **a)** $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$, $a_4 = 10$, $a_{10} = 28$

b) $b_1 = 3$, $b_2 = 1$, $b_3 = -1$, $b_4 = -3$, $b_{10} = -15$

c) $c_1 = 0$, $c_2 = 7$, $c_3 = 26$, $c_4 = 63$, $c_{10} = 999$

d) $d_1 = 1$, $d_2 = \frac{3}{4}$, $d_3 = \frac{3}{5}$, $d_4 = \frac{1}{2}$, $d_{10} = \frac{1}{4}$

e) $e_1 = 1$, $e_2 = -1$, $e_3 = 1$, $e_4 = -1$, $e_{10} = -1$

f) $f_1 = \frac{2}{3}$, $f_2 = 2$, $f_3 = 6$, $f_4 = 18$, $f_{10} = 13\,122$

2. **a)** $\frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}$ **b)** $-125, 216, -343$ **c)** $42, 56, 72$ **d)** $24, 28, 32$

3. **a)** $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ **b)** $b_n = (-1)^n \cdot n^3$ **c)** $c_n = n \cdot (n+1)$ **d)** $d_n = 4n$

4. **a)** $a_n = \left(\frac{n}{2}\right)^2 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{9}{4}$, $a_4 = 4$

b) $b_n = \frac{n^2}{2} \Rightarrow b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = 2$, $b_3 = \frac{9}{2}$, $b_4 = 8$

c) $c_n = n^2 + (n+1)^2 \Rightarrow c_1 = 5$, $c_2 = 13$, $c_3 = 25$, $c_4 = 41$

5. **a)** $a_1 = 7$, $a_2 = 10$, $a_3 = 13$, $a_4 = 16$, $a_5 = 19$

b) $b_1 = \frac{1}{12}$, $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_3 = \frac{1}{3}$, $b_4 = \frac{2}{3}$, $b_5 = \frac{4}{3}$

c) $c_1 = 5$, $c_2 = 7$, $c_3 = 6$, $c_4 = \frac{13}{2}$, $c_5 = \frac{25}{4}$

d) $d_1 = 5$, $d_2 = 7$, $d_3 = 24$, $d_4 = 62$, $d_5 = 172$

6. **a)** $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$

b) $b_1 = 2$, $b_2 = 16$, $b_n = \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$

c) $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_n = (c_{n-1} + c_{n-1})^2$

7. $t_1 = 1$, $t_n = t_{n-1} + n$

Ficha *Progresiones aritméticas*

1. **a)** Sí es progresión aritmética: $d = 6$.

b) No es progresión aritmética.

c) No es progresión aritmética.

d) Sí es progresión aritmética: $d = -3$.

e) No es progresión aritmética.

f) No es progresión aritmética.

2. **a)** $a_n = 3 + (n - 1) \cdot (-5) = 8 - 5n$

b) $b_n = 11 + (n - 1) \cdot 2 = 2n + 9$

c) $c_n = \frac{5}{3} + (n-1) \cdot \frac{1}{3}$

d) $d_n = 1{,}2 + (n - 1) \cdot 0{,}4 = 0{,}4n + 0{,}8$

3. **a)** $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 2 = 2n + 1 \Rightarrow a_{100} = 201,\ a_{200} = 401,\ a_{500} = 1001$

b) $b_n = -5 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n - 2 \Rightarrow b_{100} = -302,\ b_{200} = -602,\ b_{500} = -1502$

c) $c_n = \frac{3}{2} + (n-1) \cdot \frac{1}{4} = \frac{n+5}{4} \Rightarrow c_{100} = \frac{105}{4},\ c_{200} = \frac{205}{4},\ c_{500} = \frac{505}{4}$

d) $d_n = 5 + (n - 1) \cdot (-4) = 9 - 4n \Rightarrow d_{100} = -391,\ d_{200} = -791,\ d_{500} = -1991$

4. **a)** $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_4 = a_1 + 3d \Rightarrow 15 = 3 + 3d \Rightarrow d = 4 \Rightarrow a_n = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1$

b) Sustituyendo en la fórmula general:

$$b_n = b_1 + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} b_2 = b_1 + d \\ b_5 = b_1 + 4d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = b_1 + d \\ 0 = b_1 + 4d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 8 \\ d = -2 \end{cases} \Rightarrow b_n = 8 - 2(n-1) = 10 - 2n$$

c) Sustituyendo en la fórmula general:

$$c_n = c_1 + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} c_3 = c_1 + 2d \\ c_7 = c_1 + 6d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = c_1 + 2d \\ 9 = c_1 + 6d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 6 \\ d = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow c_n = 6 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n+11}{2}$$

d) $d_n = d_1 + (n-1)d \Rightarrow d_9 = d_1 + 8d \Rightarrow -19 = -3 + 8d \Rightarrow d = -2 \Rightarrow d_n = -3 + (n-1) \cdot (-2) = -2n - 1$

5. **a)** $S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{3 + 41}{2} \cdot 20 = 440$

b) $S_{20} = \frac{b_1 + b_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{-5 - 62}{2} \cdot 20 = -670$

c) $S_{20} = \frac{c_1 + c_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{25}{4}}{2} \cdot 20 = \frac{310}{4} = \frac{155}{2}$

d) $S_{20} = \frac{d_1 + d_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{5 - 71}{2} \cdot 20 = -660$

6. **a)** $2702 = 3n + 5 \Rightarrow n = 899$. Ocupa el lugar 899.

b) $150 = 140 - 2n \Rightarrow n = -5$. No pertenece a la progresión porque la solución no es un número natural.

c) $106 = 10 + 4n \Rightarrow n = 24$. Ocupa el lugar 24.

7. $a_n = 9 + (n - 1) \cdot (-6) = 15 - 6n$

$$S_{40} = \frac{a_1 + a_{40}}{2} \cdot 40 = 20 \cdot (100 + a_{40}) = 2000 + 20a_{40} \Rightarrow 7900 = 2000 + 20a_{40} \Rightarrow a_{40} = 295$$

$$a_{40} = 295 \Rightarrow 295 = 100 + 39d \Rightarrow d = 5 \Rightarrow a_n = 100 + (n-1) \cdot 5 = 5n + 95$$

Ficha *Progresiones geométricas*

1. **a)** No es progresión geométrica.

b) Sí es progresión geométrica $r = 2$.

c) Sí es progresión geométrica: $r = \frac{1}{2}$.

d) No es progresión geométrica.

e) Sí es progresión geométrica $r = -2$.

f) Sí es progresión geométrica: $r = \frac{3}{2}$.

2. **a)** $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}$

b) $b_n = 2 \cdot (-2)^{(n-1)}$

c) $c_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{(n-1)}$

d) $d_n = (-1)^{(n-1)}$

3. a) $a_n = 3 \cdot 2^{(n-1)} \Rightarrow a_{12} = -6144$

b) $b_n = 5 \cdot 0{,}1^{(n-1)} \Rightarrow b_{12} = 5 \cdot 10^{-11}$

c) $c_n = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)} \Rightarrow c_{12} = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{11} = \frac{3^4}{3^{11}} = \frac{1}{3^7}$

d) $d_n = \frac{1}{4} \cdot (-2)^{(n-1)} \Rightarrow d_{12} = 512$

4. **a)** $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)} \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot r^{(n-1)} \Rightarrow -24 = 3 \cdot r^3 \Rightarrow -8 = r^3 \Rightarrow r = -2 \Rightarrow a_n = 3 \cdot (-2)^{(n-1)}$

b) Sustituyendo en la fórmula general:

$$b_n = b_1 \cdot r^{(n-1)} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = b_1 \cdot r \\ b_6 = b_1 \cdot r^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}0006 = b_1 \cdot r \\ 6 = b_1 \cdot r^5 \end{cases} \Rightarrow r^4 = 10\,000 \Rightarrow r = 10 \Rightarrow b_1 = 0{,}00006 \Rightarrow b_n = 0{,}00006 \cdot 10^{(n-1)}$$

5. **a)** $S_8 = \frac{a_8 \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{3 \cdot (-2)^7 \cdot (-2) - 3}{-2-1} = -255$

b) $S_8 = \frac{b_8 \cdot r - b_1}{r-1} = \frac{5 \cdot 0{,}1^7 \cdot 0{,}1 - 5}{0{,}1-1} = 5{,}56$

c) $S_8 = \frac{c_8 \cdot r - c_1}{r-1} = \frac{81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \frac{1}{3} - 81}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{6560}{54} = \frac{3280}{27}$

d) $S_8 = \frac{d_8 \cdot r - d_1}{r-1} = \frac{\frac{1}{4} \cdot (-2)^7 \cdot (-2) - \frac{1}{4}}{-2-1} = \frac{64 - \frac{1}{4}}{-3} = \frac{255}{-12} = \frac{-85}{4}$

6. **a)** $S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{81}{1-\frac{1}{3}} = \frac{243}{2}$

b) $S_\infty = \frac{b_1}{1-r} = \frac{50}{1-\frac{1}{10}} = \frac{500}{9}$

c) $S_\infty = \frac{c_1}{1-r} = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = 16$

7. El número de bacterias forman una progresión geométrica en la que $a_1 = 10$ y $r = 2$: $a_n = 10 \cdot 2^{(n-1)}$.

$a_1 = 10$, $a_2 = 20$ (30 minutos), $a_3 = 40$ (60 minutos), $a_4 = 80$ (90 minutos)…

A las 24 horas habrá, $a_{49} = 10 \cdot 2^{48}$ bacterias.

PROFUNDIZACIÓN

Ficha *La solución de Fibonacci y el número de oro*

1. Encuentra situaciones en distintos contextos en donde aparezca el número de oro.

Respuesta libre.

Hay numerosas situaciones: Partenón de Atenas, pirámides de Egipto, DNI, el hombre de Vitruvio, crecimiento de algunas plantas (piñas por ejemplo), la espiral logarítmica, etc.

2. Demuestra de una manera más rigurosa que el cociente entre dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci tiende al número de oro.

Sea L el límite de esa sucesión. Entonces:

$$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{L} \Rightarrow L^2 - L - 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ficha *Progresiones aritmético - geométricas*

1. Calcula la suma de los infinitos términos de la sucesión $a_n = \frac{(5n+1)\cdot 2^n}{(-3)^n}$.

En este caso *a* = 5, *b* =1 y $r = -\frac{2}{3}$, luego se puede calcular la suma de los infinitos términos.

$$S = \frac{a\cdot r + b\cdot r\cdot(1-r)}{(1-r)^2} = \frac{5\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{-\frac{10}{3} - \frac{10}{9}}{\frac{25}{9}} = \frac{-\frac{40}{9}}{\frac{25}{9}} = -\frac{8}{5}$$

2. Dada la progresión de términos 4, 4, 3, 2, $\frac{5}{4}$, ...:

a) Comprueba que es una progresión aritmético-geométrica y obtén su término general.

La progresión del ejercicio, es el producto de la progresión aritmética 2, 4, 6, 8, ... y de la progresión geométrica 2, 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$. El término general de la primera es $a_n = 2n$ y de la segunda es $b_n = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$, con lo que el término general de la progresión aritmético-geométrica será $c_n = 2n\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = 8n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

El sexto término será $12\cdot\frac{1}{16} = \frac{3}{4}$ y el séptimo $14\cdot\frac{1}{32} = \frac{7}{16}$.

b) Calcula, si es posible, la suma de los infinitos términos de esta progresión.

$$S = \frac{a\cdot r + b\cdot r\cdot(1-r)}{(1-r)^2} = \frac{4}{\frac{1}{4}} = 16$$