TEMA 20: EL LENGUAJE ALGEBRAICO. SÍMBOLOS Y NÚMEROS. IMPORTANCIA DE SU DESARROLLO Y PROBLEMAS QUE RESUELVE. EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL ÁLGEBRA.

TIEMPO: XX — XX

Esquema

1) El lenguaje algebraico:

▷ Se denomina Álgebra a la parte de las matemáticas que trata del cálculo de cantidades consideradas en general, esto es, independientemente de toda magnitud numérica y de todo sistema de numeración. El Álgebra tiene por fin generalizar la resolución de las cuestiones relativas a los números.

▷ Para la exposición de las diferentes áreas del Álgebra a lo largo de las épocas se ha ido configurando un conjunto específico de conceptos, expresiones y símbolos que permiten expresar y homogeneizar toda la teoría existente. Este amplio conjunto recibe el nombre de lenguaje algebraico.

▷ Para que un lenguaje (simbólico o no) sea satisfactorio, debe cumplir dos propiedades:

1) Expresar de manera clara y concisa el propósito para el que fue pensado.
2) Debe ser conveniente para operar con él, aportando simplicidad y claridad en su manejo.

El lenguaje algebraico actual, depurado a través de los siglos, cumple estas dos propiedades y cualquier ampliación del mismo también las ha de mantener en todo momento.

▷ El origen del Álgebra comienza cuando cuando se empieza a centrar el interés , más que en los números, en las operaciones que se pueden realizar con ellos de manera abstracta. El desarrollo del Álgebra no ha sido lineal ni en el tiempo ni en el espacio, ni siquiera dentro del mismo conjunto de matemáticos vecinos y coetáneos.

▷ Diofanto fue el primero en utilizar un símbolo para referirse a una incógnita de una ecuación. Sin embargo, para que el sistema se desarrollase se necesitaría una ampliación del concepto de número que no llegaría hasta el Renacimiento con los negativos, el cero y los complejos. Los dos grandes nombres de la sistematización del lenguaje algebraico tal y como hoy en día lo conocemos fueron Vieta y Descartes, aún a pesar de cierta opinión generalizada de que ese lenguaje era una pérdida de tiempo.

▷ Como ejemplo de la evolución del lenguaje algebraico veamos como expresaron algunos matemáticos la ecuación $3x^2 - 5x + 6 = 0$:

$$\begin{cases} \text{Luca Pacioli}(s.XV) & : \ \text{3 CENSUS P 6 DE 5 REBUS AE 0} \\ \text{Stevin}(s.XVI) & : 3_2 - 5_1 + 6_* = 0 \\ \text{Vieta}(s.XVI) & : 3Q - 5N + 6 \text{ ae } 0 \\ \text{Descartes}(s.XVII) & : 3xx - 5x + 6 = 0 \end{cases}$$

2) Símbolos y números:

▷ **<u>Números</u>**: para representar cantidades usamos las letras del alfabeto (occidental y griego) tanto mayúsculas como minúsculas. Esto genera una cantidad nada despreciable de símbolos a nuestro alcance.
Si hicieran falta más símbolos, se añaden uno o varios símbolos "′" a la letra para indicar otro número distinto a los anteriores (el ejemplo más claro es el de una función, representada por la letra "f", y sus primeras derivadas: "f'" y "f''").
Otra manera de aumentar las opciones es el uso de súper o subíndices (o ambos). Esta notación $a_1, a_2, a_2, ...$ nos es muy útil para representar conjuntos con un número muy grande de elementos como los infinitos términos de una sucesión.

▷ **<u>Símbolos</u>**: dado que el Álgebra trata con expresiones y resultado generales, para su representación además de las letras mencionadas anteriormente, se usan otros símbolos apropiados:

I) Para relacionar cantidades:

   I.I) El símbolo "$=$" expresa la igualdad entre dos cantidades. Si tenemos $a = b$ lo leemos como "a es igual a b".

   I.II El símbolo "$\neq$" expresa la desigualdad entre dos cantidades. Si tenemos $a \neq b$ lo leemos como "a no es igual a b"

   I.III) Los signo "$<$" o "$>$" representan la relación de orden entre dos cantidades. Si tenemos $a > b$ lo leemos como "a es mayor que b" y si tenemos $a < b$ lo leemos "a es menor que b".

II) El uso de los símbolos para las operaciones básicas de adición, sustracción, multiplicación y división: $+$, $-$, $\times$ o $\cdot$, $:$ o $/$ y sus generalizaciones con sumatorias $\sum$ y productorios $\prod$.

III) Símbolos que indican operaciones más complejas como las raíces ($\sqrt{}$), el factorial (!) o el valor absoluto de un número ($|\cdot|$).

IV) Símbolos de conceptos matemáticos que tiene una importancia especial: el infinito (∞), pi (π) o el conjunto vacío ($\emptyset$).

V) Los símbolos relacionados con la lógica como "para todo" ($\forall$), "implicación" ($\longrightarrow$) o "existencia" ($\exists$).

VI) Los conjuntos numéricos: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, etc.

▷ Cabe destacar que debido a la inmensa cantidad de ramas de la Matemática, hay símbolos algebraicos que son compartidos por diferentes áreas con significados distintos y, por tanto, requieren de una contextualización. Este es uno de los problemas de nuestra construcción del lenguaje algebraico (aunque, por lo general, no lleva a graves problemas). Por ejemplo, el símbolo ":" puede significar "división" como operación aritmética o "tal que" dentro de la lógica proposicional.

3) Importancia de su desarrollo y problemas que resuelve:

$\triangleright$ En los orígenes del Álgebra, los matemáticos usaban esta ciencia únicamente para expresar y resolver ecuaciones y teoremas. Pero los matemáticos de los distintos tiempos fueron desarrollando el Álgebra y utilizándola en sus trabajos sobre física, geometría, astronomía,... Como consecuencia, el Álgebra cambió de rumbo y amplió su dominio a todas las ramas y teorías conocidas. Así pues, el espectro de conceptos que se incluyen en el desarrollo del Álgebra es amplio y de gran riqueza, resolviendo problemas que conciernen al estudio de muchos campos y ciencias. Estudios, teorías y campos en los que el Álgebra está presente son, por ejemplo:

1) **Espacios vectoriales**: el álgebra lineal se ha extendido para considerar espacios de dimensión arbitraria (finita o infinita). Los espacios vectoriales permiten definir los espacios afines abstractos y, en general, toda la geometría. Tienen multitud de aplicaciones en la matemática (espacios de funciones), las ciencias naturales (física: las magnitudes vectoriales), las ciencias sociales (economía: el PIB de "n" países se puede representar mediante un vector n-dimensional),...

2) **Determinantes y matrices**: herramientas básicas para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales y en derivadas parciales que aparecen en multitud de problemas de la ingeniería.

3) **Formas bilineales, cuadráticas y hermíticas**: aplicaciones en el estudio de espacios normados.

4) **Valores propios**: relacionado con el estudio de los subespacios invariantes y resolución de ecuaciones diferenciales.

5) **Estructuras algebraicas**: estudio de otras estructuras como grupos, anillos,... Muchas de estas definiciones nacen en el s.XIX por la necesidad de exactitud en las construcciones matemáticas. El Álgebra permitió observar lo intrínseco de las afirmaciones lógicas en las que se basa toda la Matemática.

6) **Programación Lineal**: muchos problemas en Matemáticas, Economía, Psicología,... se reducen a ver si una aplicación $L : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ tiene un mínimo en un cierto subconjunto $D \subset \mathbb{R}^n$. En caso de que exista, se trata de calcular su valor y los $x \in D$ en los que dicho valor se alcanza. Si, en particular, L es una forma lineal y D viene dado mediante desigualdades lineales, entonces diremos que se trata de un problema de programación lineal. Por ejemplo: el problema de la búsqueda del camino más corto entre los posibles al recorrer 'n" lugares dados.

7) **Resolución de ecuaciones**: con la ayuda de la Teoría de Abel-Galois se responde a la pregunta de si hay una fórmula general para encontrar las raíces de los polinomios de grado 5 o superior. El Teorema de Galois para $\mathbb{R}$ dice que un polinomio f(x) (con $x \in \mathbb{R}$) es soluble por radicales si y sólo si su grupo de Galois es soluble (donde soluble quiere decir que hay una cadena de subgrupos normales $\{1_G\} \triangleleft G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft \ldots \triangleleft G_{n-1} \triangleleft G_n = G$ donde G_{k+1}/G_k es abeliano). El primer grupo no soluble es el grupo alternado de orden 5, A_5, que corresponde a ciertos polinomios de grado 5. La Teoría de Abel-Galois nos dice cuándo y cómo encontrar esas fórmulas para polinomios específicos.

4) Evolución histórica del Álgebra:

▷ Antigüedad (Mesopotamia y Egipto): ya hacia el año 2.000 a.C. tenemos tablillas de resolución de ecuaciones cuadráticas de manera equivalente al método actual general. El álgebra egipcia se centró casi exclusivamente en la resolución de ecuaciones lineales pero en Mesopotamia fueron más allá y resolvieron "satisfactoriamente" la ecuación de segundo grado normalizada: $x^2 + p \cdot x + q = 0$. Por "satisfactoriamente" queremos decir que aunque su nivel de abstracción y flexibilidad de los conceptos a los problemas era muy alto, ellos no tenían alfabeto (con lo que "$a \cdot x = b$" no significaba nada), tampoco tenían reparo en sumar un área y un volumen, necesitaban distinguir casos como $x^2+p\cdot x = q$ y $x^2+q = p\cdot x$ pues la fórmula general requiere del alfabeto y también resulta claro que todos los problemas eran situaciones reales que requerían una solución real (así pues "$x^2 + 1 = 0$" no les valía como ecuación).
Aparte de las ecuaciones de segundo grado resolvieron algunas ecuaciones cúbicas y del estilo "$x^4 + b \cdot x^2 + c = 0$" pues era de segundo grado "camufladas". Obsérvese que estamos hablando de personas que no tenían nuestro sistema de notación (aunque sí el principio posicional) y que vivieron hace más de 3.000 años.

▷ Antigua Grecia: el lugar principal entre las escuelas griegas de filosofía lo ocuparon sucesivamente la jónica, la pitagórica y la ateniense. En estas escuelas también se elaboraban cuestiones matemáticas en especial los problemas prácticos relacionados con mediciones, construcciones y cálculos geométricas. A estos problemas se les englobó dentro de la "logística". A esta ciencia se le atribuirán: extracción numérica de raíces, cálculo de fracciones, problemas prácticos de arquitectura,...
Destacamos los tres problemas clásicos de la Matemática griega (construcciones con regla y compás):

a) La cuadratura del círculo: construir un cuadrado de área π. Se demuestra que es imposible.

b) La trisección del ángulo: dividir un ángulo en tres partes iguales. En general no es posible.

c) Duplicación del cubo: construir un cubo con el doble de volumen de uno dado. No es posible.

▷ Antigüedad (China e India): en las Antiguas China e India también se plantean estas cuestiones y sabemos que en China se conocía la resolución de sistemas lineales de ecuaciones usando determinantes (ellos no los llamaban así). Esos tratados son más de mil años anteriores a la aparición en Europa de los resultados análogos.
Los chinos, además, siempre fueron muy aficionados a los diseños armónicos y no es de extrañar que el primer ejemplo de cuadrado mágico se lo debamos a ellos (según la leyenda estaba inscrito en el caparazón de una tortuga de río). El interés por este tipo de modelos es lo que llevó al método de resolución de ecuaciones lineales. Ellos operaban sobre las columnas (las filas no tenían el mismo tratamiento) del mismo modo que hacemos con el método de Gauss.

▷ Árabes: las matemáticas árabes acumularon muchos procedimientos de cálculo y algoritmos especiales como:

a) Obtención de 17 cifras decimales exactas del número π mediante polígonos inscritos.

b) Cálculo de raíces por el "método del elemento celeste" (técnica que aprendieron de los chinos) y cálculo de distintas raíces del tipo $\sqrt[n]{q}$

c) Se dieron cuenta de que: $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$ y que $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m}$

En Europa la tabla de coeficientes binomiales (≤ 17) fue publicada en el s.XVI (por Stiefel) y el método de cálculo de raíces superado por Ruffini y Horner en el s.XIX.

$\triangleright$ Hasta mediados del s.XIX: durante estos siglos, el problema fundamental del Álgebra lo constituía la resolución de ecuaciones algebraicas. Se descubrieron multitud de métodos y a finales del s.XVIII se vieron obligados a la introducción de nuevos conceptos (grupo, campo,...) que terminarían revolucionando el Álgebra. De esta época destacaremos el Teorema Fundamental del Álgebra y la imposibilidad de resolución en general de las ecuaciones de grado mayor que 4 (Teoría de Abel-Galois).

$\triangleright$ Hasta nuestros días: en el s.XIX y recogiendo los trabajos de Gauss, Cauchy o Galois, se produce el gran salto abstracto del Álgebra gracias a los trabajos de Boole, Dirichlet o Weierstrass. De esta época vamos a destacar:

a) Teoría de Conjuntos: el nacimiento de la Teoría de Conjuntos en el s.XIX es fruto de los trabajos del matemático alemán George Cantor y se produjo paralelamente al desarrollo de las bases de la lógica matemática en la obra de Frege.

b) Espacios Vectoriales: el matemático Peano dio la primera definición moderna de un espacio vectorial a finales del s.XIX. Un desarrollo importante de los espacios vectoriales se debe a la construcción de funciones por Lebesgue. Esto, más tarde, sería formalizado por Banach y Hilbert. En ese tiempo se hicieron los primeros estudios sobre espacios vectoriales de dimensión infinita.

c) Teoría de Matrices: los determinantes tuvieron un gran desarrollo durante los siglos XVII-XIX donde hubo contribuciones de Leibniz, Lagrange, Vandermonde, Gauss, Jacobi,... Será Cayley, en el s.XIX, quien introducirá las nociones básicas sobre matrices. El mérito de Cayley estriba en extraer la idea de matriz a partir del determinante y, por ello, es considerado como el fundador de la teoría de matrices. Tras la publicación de la obra de Cayley mucho matemáticos han contribuido a ampliar y completar al teoría de matrices. Destacamos a Frobenius y a Jordan.

d) Álgebra abstracta: dando el salto cualitativo hacia la importancia de las leyes de composición y estructuras algebraicas "*per se*" en vez de la resolución de ecuaciones se abren nuevos caminos para el Álgebra como el desarrollo de los Grupos de Lie, la Teoría de caracteres o la Teoría algebraica de números.

$\triangleright$ Grandes resultados del Álgebra en los últimos tiempos: dentro de los grandes logros del Álgebra en los últimos años del s.XX destacamos:

1) La clasificación de los grupos simples finitos. Trabajo de muchos matemáticos aunque destacaremos a Gorenstein.

2) La Teoría de Nudos y sus aplicaciones en el estudio del ADN y la síntesis de nuevas moléculas gracias a Vaughan Jones.

3) Resolución del "Último Teorema de Fermat" por Andrew Wiles: dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$, la ecuación $a^n + b^n = c^n$ tiene solución si, y sólo si, $n < 3$.