Continuidad y teoremas relacionados.

M. Carmen Hurtado y David Matellano.

Departamento de Matemáticas. IES Ángel Corella. (Colmenar Viejo)

8 de abril de 2020

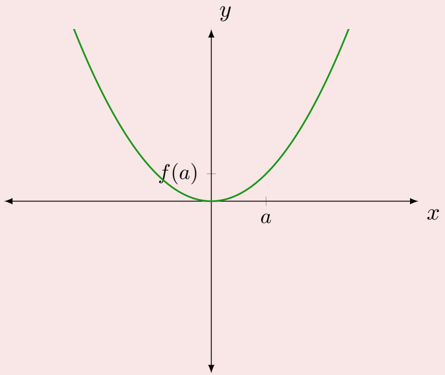
índice de contenidos I

1. Continuidad de una función
   - Continuidad de una función en un punto
   - Continuidad de una función en un intervalo
   - Tipos de discontinuidad
2. Teorema de Bolzano
3. Teorema de Darboux
4. Teorema de Weierstrass
5. Aplicaciones de GeoGebra

Continuidad de una función en un punto $x = a$.

- $f(x)$ es continua en $x = a \Leftrightarrow$

Figuras.



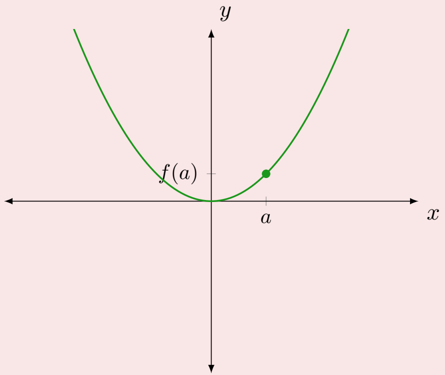
Continuidad de una función en un punto.

Definición.

Continuidad de una función en un punto $x = a$.

- $f(x)$ es continua en $x = a \Leftrightarrow$
- $\exists f(a)$

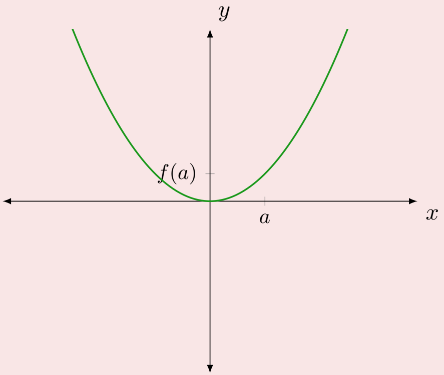
Figuras.



Continuidad de una función en un punto $x = a$.

- $f(x)$ es continua en $x = a \Leftrightarrow$
- $\exists f(a)$
- $\exists \lim_{x \to a} f(x)$

Figuras.



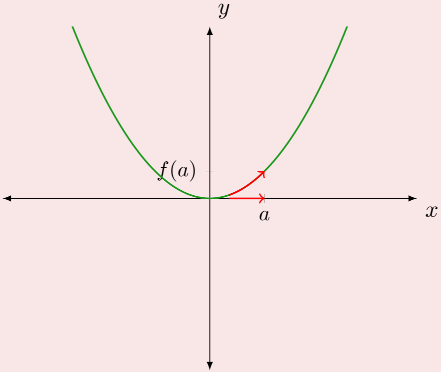
Continuidad de una función en un punto $x = a$.

- $f(x)$ es continua en $x = a \Leftrightarrow$
- $\exists f(a)$
- $\exists \lim_{x \to a} f(x)$

¡Recuerda!

☞ $\exists \lim_{x \to a^-} f(x)$

Figuras.



Continuidad de una función en un punto.

Definición.

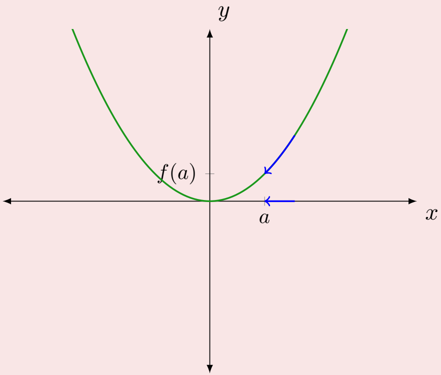
Continuidad de una función en un punto $x = a$.

- $f(x)$ es continua en $x = a \Leftrightarrow$
- $\exists f(a)$
- $\exists \lim_{x \to a} f(x)$

¡Recuerda!

- ☞ $\exists \lim_{x \to a^-} f(x)$
- ☞ $\exists \lim_{x \to a^+} f(x)$

Figuras.



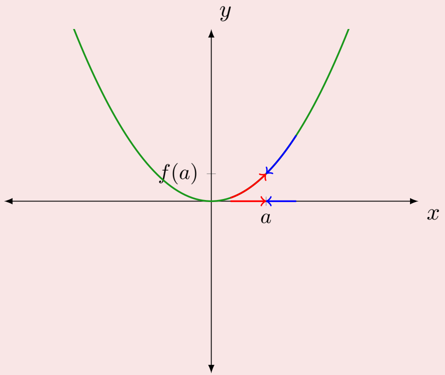
Continuidad de una función en un punto $x = a$.

- $f(x)$ es continua en $x = a \Leftrightarrow$
- $\exists f(a)$
- $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$

¡Recuerda!

- $\exists \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$
- $\exists \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

Figuras.



Continuidad de una función en un punto $x = a$.

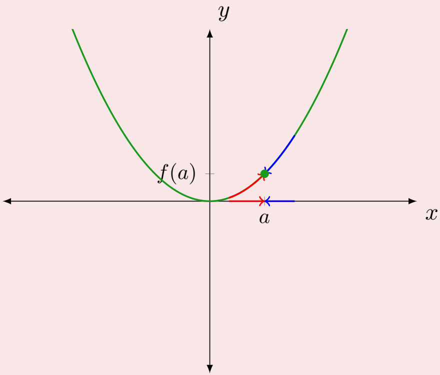
- $f(x)$ es continua en $x = a \Leftrightarrow$
- $\exists f(a)$
- $\exists \lim_{x \to a} f(x)$

¡Recuerda!

- ☞ $\exists \lim_{x \to a^-} f(x)$
- ☞ $\exists \lim_{x \to a^+} f(x)$
- ☞ $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$

- $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

Figuras.



Continuidad de una función en un intervalo.

Definición.

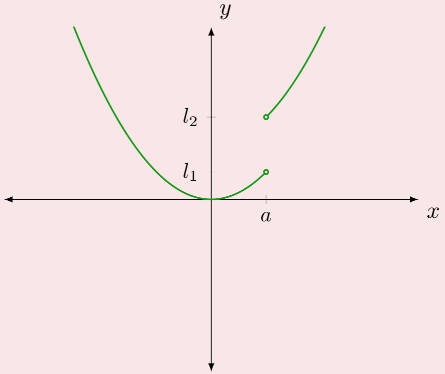
Continuidad de una función en un intervalo I.

- $f(x)$ es continua en un intervalo I cuando lo es $\forall x \in I$

Discontinuidad de salto finito.

- $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x = a$ cuando:

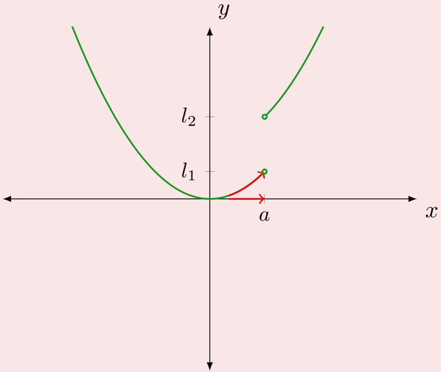
Figuras.



Discontinuidad de salto finito.

- $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x = a$ cuando:
  - ☞ $\exists \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$

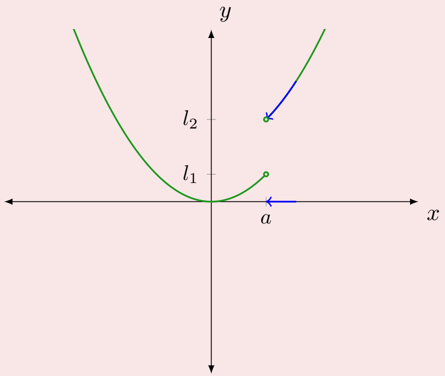
Figuras.



Discontinuidad de salto finito.

- $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x = a$ cuando:
  - ☞ $\exists \lim_{x \to a^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$
  - ☞ $\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$

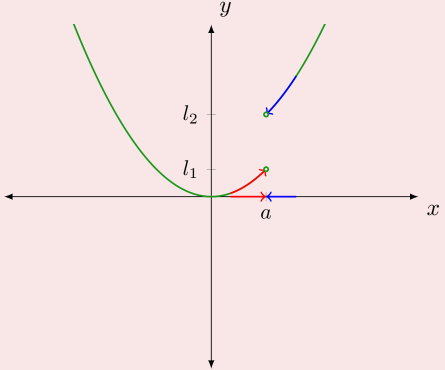
Figuras.



Discontinuidad de salto finito.

- $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x = a$ cuando:
  - ☞ $\exists \lim_{x \to a^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$
  - ☞ $\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$
  - ☞ $l_1 \neq l_2$

Figuras.



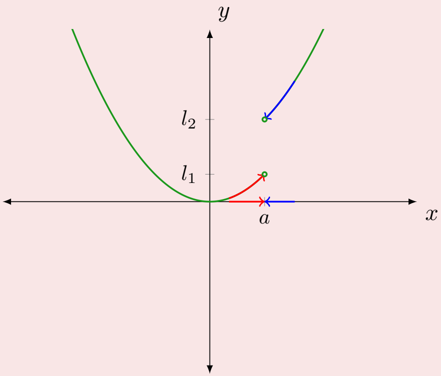
Discontinuidad de salto finito.

- $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x = a$ cuando:
  - ☞ $\exists \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$
  - ☞ $\exists \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$
  - ☞ $l_1 \neq l_2$

Posibles casos

- Es independiente del valor $f(a)$

Figuras.



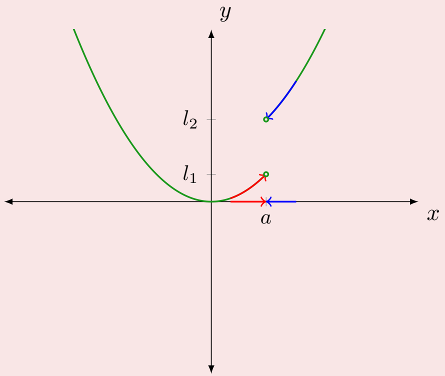
Discontinuidad de salto finito.

- $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x = a$ cuando:
  - ☞ $\exists \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$
  - ☞ $\exists \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$
  - ☞ $l_1 \neq l_2$

Posibles casos

- Es independiente del valor $f(a)$
- $\nexists f(a)$

Figuras.



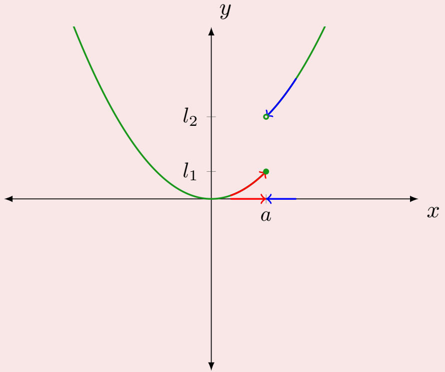
Discontinuidad de salto finito.

- $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x = a$ cuando:
  - ☞ $\exists \lim_{x \to a^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$
  - ☞ $\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$
  - ☞ $l_1 \neq l_2$

Posibles casos

- Es independiente del valor $f(a)$
- $\exists f(a);\ f(a) = l_1$

Figuras.



Tipos de discontinuidad

Definición.

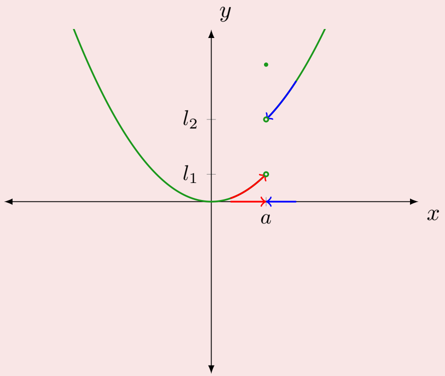
Discontinuidad de salto finito.

- $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x = a$ cuando:
  - ☞ $\exists \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$
  - ☞ $\exists \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$
  - ☞ $l_1 \neq l_2$

Posibles casos

- Es independiente del valor $f(a)$
- $\exists f(a);\ l_1 \neq f(a) \neq l_2$

Figuras.



Discontinuidad de salto infinito.

- $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = a$ cuando al menos uno de los límites laterales es infinito.

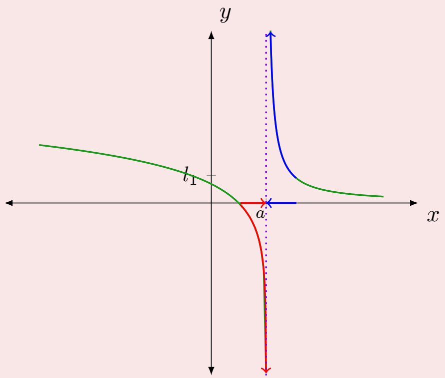
Discontinuidad de salto infinito.

- $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = a$ cuando al menos uno de los límites laterales es infinito.

Posibles casos

- $\nexists f(a)$; $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$

Figuras.



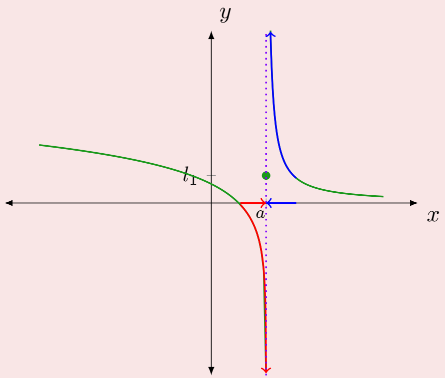
Discontinuidad de salto infinito.

- $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = a$ cuando al menos uno de los límites laterales es infinito.

Posibles casos

- $\nexists f(a)$; $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$

Figuras.



Tipos de discontinuidad
Definición.

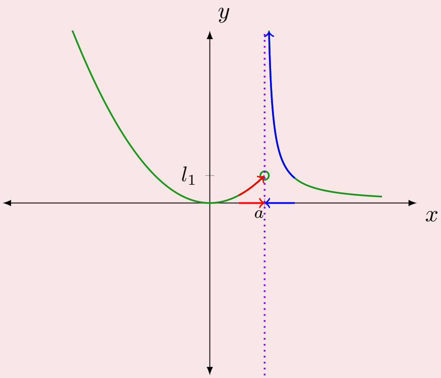
Discontinuidad de salto infinito.

- $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = a$ cuando al menos uno de los límites laterales es infinito.

Posibles casos

- $\nexists f(a);\ \lim_{x\to a^-} f(x) = l_1;\ \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$

Figuras.



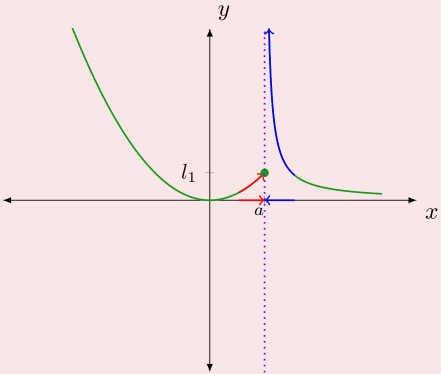
Discontinuidad de salto infinito.

- $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = a$ cuando al menos uno de los límites laterales es infinito.

Posibles casos

- $\exists f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x); \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$

Figuras.



Discontinuidad esencial.

- $f(x)$ presenta una discontinuidad esencial en $x = a$ cuando no existe algunos de los límites laterales en $x = a$.

Discontinuidad esencial.

- $f(x)$ presenta una discontinuidad esencial en $x = a$ cuando no existe algunos de los límites laterales en $x = a$.

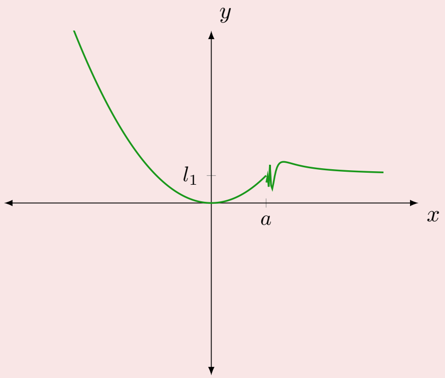
Posibles casos

- $\exists f(a); \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l_1; \nexists \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

Ejemplos si $a = 2$

☞ $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} \ si \ x \leq 2 \\ \dfrac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x-2}\right) + 1 \ si \ x > 2 \end{cases}$$

Figuras.



Discontinuidad esencial.

- $f(x)$ presenta una discontinuidad esencial en $x = a$ cuando no existe algunos de los límites laterales en $x = a$.

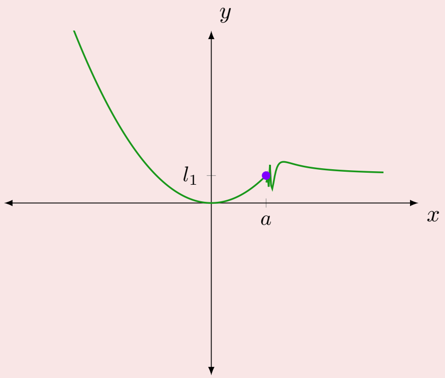
Posibles casos

- $\exists f(a)$; $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l_1; \nexists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

Ejemplos si $a = 2$

☞ $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} \; si \; x \leq 2 \\ \\ \dfrac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x-2}\right) + 1 \; si \; x > 2 \end{cases}$$

Figuras.



Discontinuidad esencial.

- $f(x)$ presenta una discontinuidad esencial en $x = a$ cuando no existe algunos de los límites laterales en $x = a$.

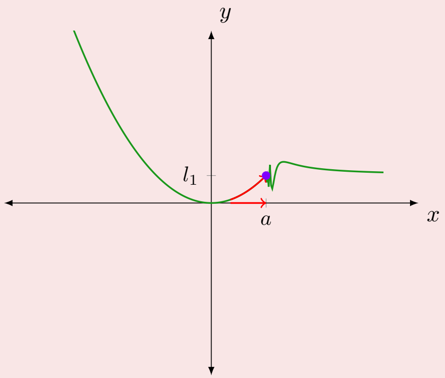
Posibles casos

- $\exists f(a); \lim_{x \to a^-} f(x) = l_1; \nexists \lim_{x \to a^+} f(x)$

Ejemplos si $a = 2$

☞ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} \; si \; x \leq 2 \\ \dfrac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x-2}\right) + 1 \; si \; x > 2 \end{cases}$

Figuras.



Tipos de discontinuidad

Definición.

Discontinuidad esencial.

- $f(x)$ presenta una discontinuidad esencial en $x = a$ cuando no existe algunos de los límites laterales en $x = a$.

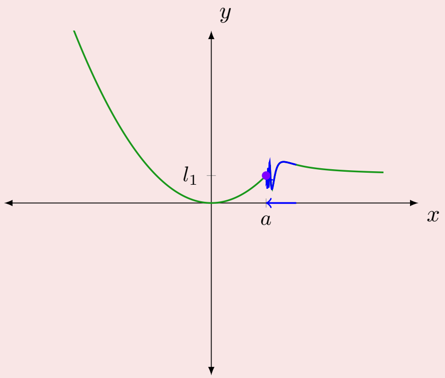
Posibles casos

- $\exists f(a);\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l_1; \nexists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

Ejemplos si $a = 2$

☞ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} \ si\ x \leq 2 \\ \dfrac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x-2}\right) + 1 \ si\ x > 2 \end{cases}$

Figuras.



Discontinuidad esencial.

- $f(x)$ presenta una discontinuidad esencial en $x = a$ cuando no existe algunos de los límites laterales en $x = a$.

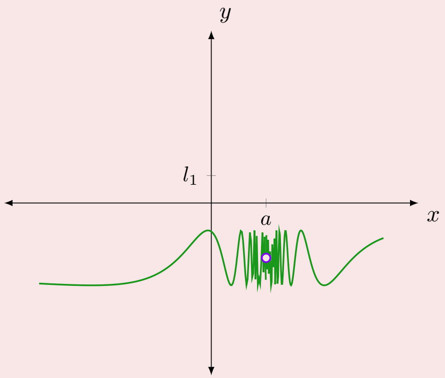
Posibles casos

- $\nexists f(a); \nexists \lim\limits_{x \to a^-} f(x); \nexists \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

Ejemplos si $a = 2$

☞ $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{10}{x-2}\right) - 2$

Figuras.



Tipos de discontinuidad

Definición.

Discontinuidad esencial.

- $f(x)$ presenta una discontinuidad esencial en $x = a$ cuando no existe algunos de los límites laterales en $x = a$.

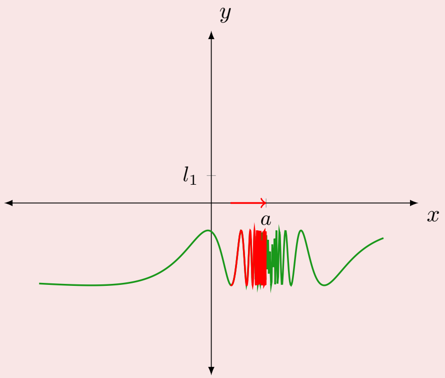
Posibles casos

- $\nexists f(a); \nexists \lim_{x \to a^-} f(x); \nexists \lim_{x \to a^+} f(x)$

Ejemplos si $a = 2$

☞ $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{10}{x-2}\right) - 2$

Figuras.



Discontinuidad esencial.

- $f(x)$ presenta una discontinuidad esencial en $x = a$ cuando no existe algunos de los límites laterales en $x = a$.

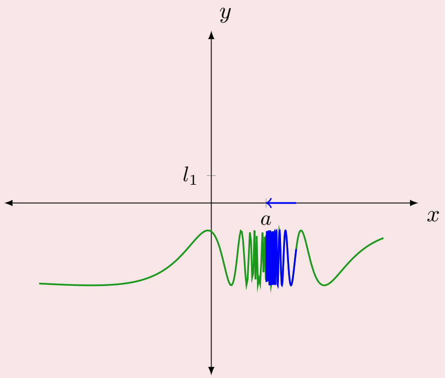
Posibles casos

- $\nexists f(a); \nexists \lim_{x \to a^-} f(x); \nexists \lim_{x \to a^+} f(x)$

Ejemplos si $a = 2$

☞ $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{10}{x-2}\right) - 2$

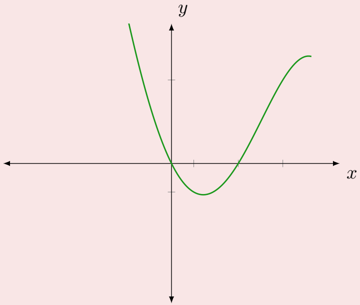
Figuras.



Teorema de Bolzano. ✍

- Sea f una función que cumple:

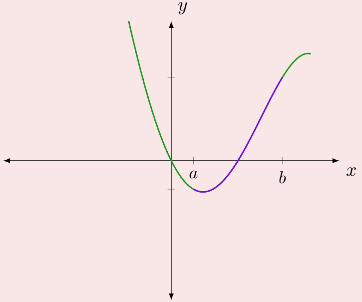
Figuras.



Teorema de Bolzano. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$

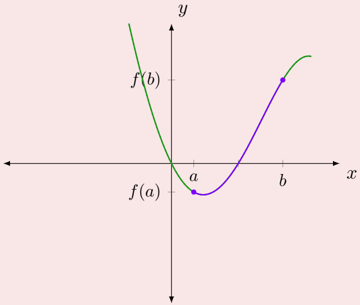
Figuras.



Teorema de Bolzano. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
  - ☞ $f(a) \cdot f(b) < 0 \Leftrightarrow f(a)$ tiene distinto signo que $f(b)$

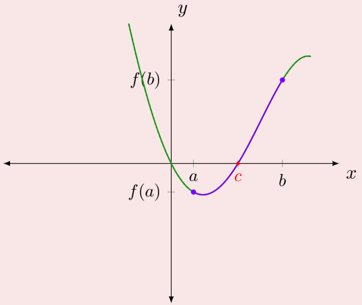
Figuras.



Teorema de Bolzano. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
  - ☞ $f(a) \cdot f(b) < 0 \Leftrightarrow f(a)$ tiene distinto signo que $f(b)$
- $\boxed{\Rightarrow \exists\ c \in (a, b) /\ f(c) = 0}$

Figuras.

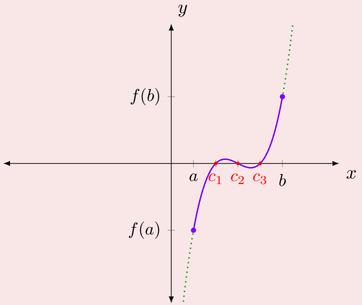


Teorema de Bolzano. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
  - ☞ $f(a) \cdot f(b) < 0 \Leftrightarrow f(a)$ tiene distinto signo que $f(b)$
- $\boxed{\Rightarrow \exists\ c \in (a, b)/\ f(c) = 0}$

💡 Puede haber más de un valor c

Figuras.



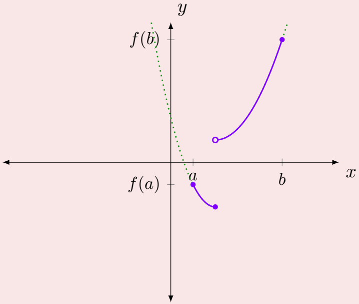
Teorema de Bolzano

A tener en cuenta:

Consideraciones importantes. ✍

☞ Sin continuidad en $[a, b]$ no se cumple la hipótesis.

Figuras.



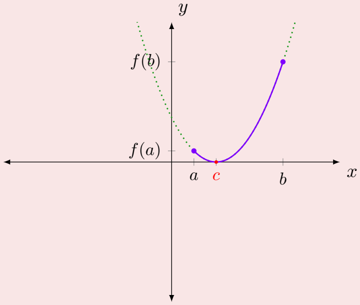
Teorema de Bolzano

A tener en cuenta:

Consideraciones importantes. ✍

- ☞ Sin continuidad en $[a, b]$ no se cumple la hipótesis.
- ☞ Si $f(a) \cdot f(b) \geq 0$ tampoco se cumple la hipótesis.

Figuras.



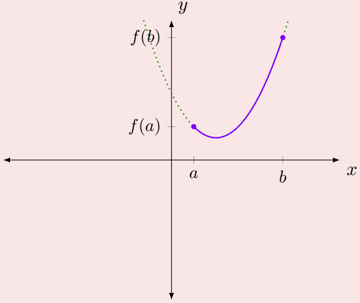
Teorema de Bolzano

A tener en cuenta:

Consideraciones importantes. ✍

- ☞ Sin continuidad en $[a, b]$ no se cumple la hipótesis.
- ☞ Si $f(a) \cdot f(b) \geq 0$ tampoco se cumple la hipótesis.

Figuras.



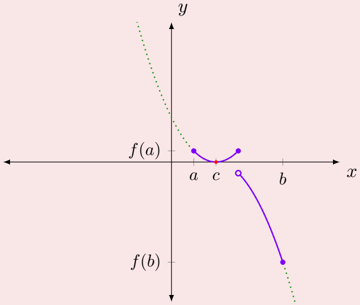
A tener en cuenta:

Consideraciones importantes. ✍

- ☞ Sin continuidad en $[a,b]$ no se cumple la hipótesis.
- ☞ Si $f(a)\cdot f(b)\geq 0$ tampoco se cumple la hipótesis.

La existencia de $c\ /\ f(c)=0$ no garantiza la hipótesis.

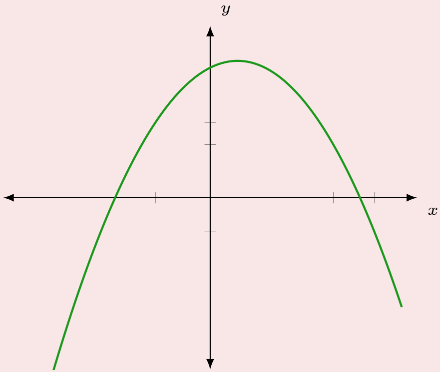
Figuras.



Teorema de Darboux. ✍

- Sea f una función que cumple:

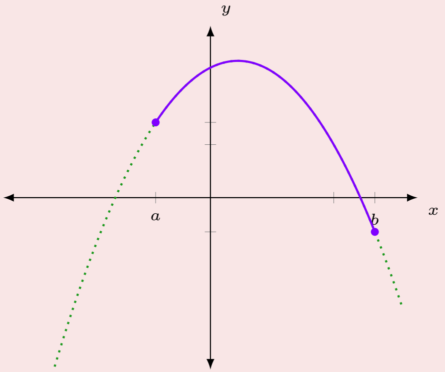
Figuras.



Teorema de Darboux. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$

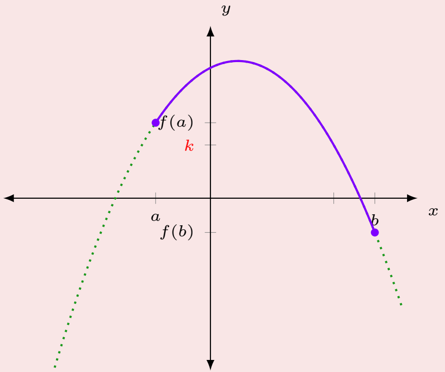
Figuras.



Teorema de Darboux. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
  - ☞ Sea k cualquier valor entre $f(a)$ y $f(b)$

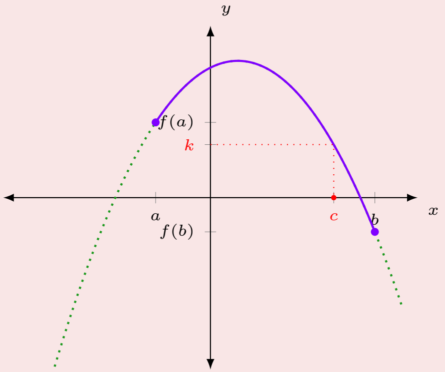
Figuras.



Teorema de Darboux. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
  - ☞ Sea k cualquier valor entre $f(a)$ y $f(b)$
- $\boxed{\Rightarrow \exists\ c \in [a, b]\ / f(c) = k}$

Figuras.

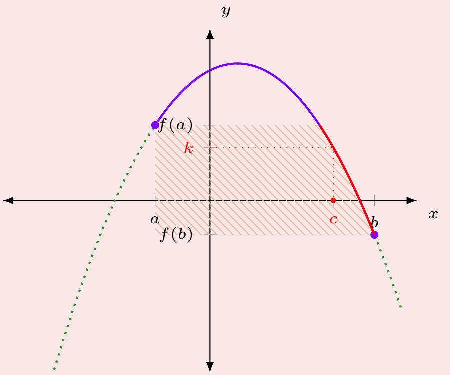


Teorema de Darboux. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
  - ☞ Sea k cualquier valor entre $f(a)$ y $f(b)$
- $\boxed{\Rightarrow \exists\ c \in [a, b]\ / f(c) = k}$

$f(x)$ toma todos los valores ente $f(a)$ y $f(b)$ si $x \in [a, b]$

Figuras.



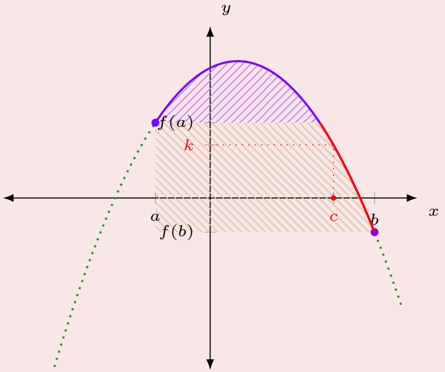
Teorema de Darboux. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
  - ☞ Sea k cualquier valor entre $f(a)$ y $f(b)$
- $\boxed{\Rightarrow \exists\ c \in [a, b]\ / f(c) = k}$

💡 $f(x)$ toma todos los valores ente $f(a)$ y $f(b)$ si $x \in [a, b]$

☞ $f(x)$ puede tomar valores no comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ también.

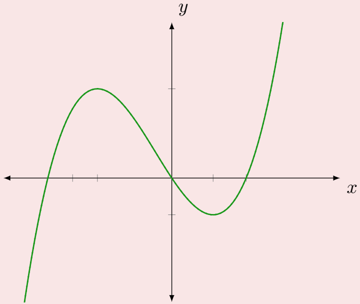
Figuras.



Teorema de Weierstrass. ✍

- Sea f una función que cumple:

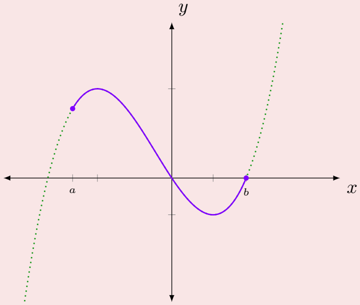
Figuras.



Teorema de Weierstrass. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$

Figuras.



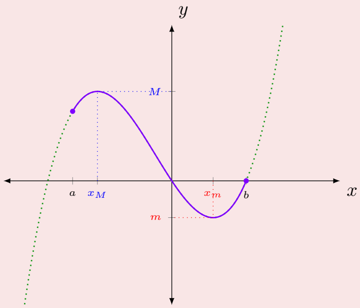
Teorema de Weierstrass.

Enunciado.

Teorema de Weierstrass. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
- $\boxed{\Rightarrow \exists\ x_m, x_M \in [a, b]\ / f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \forall x \in [a, b]}$

Figuras.



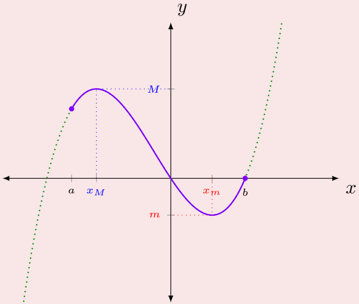
Teorema de Weierstrass. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a,b]$
- $\boxed{\Rightarrow \exists\ x_m, x_M \in [a,b]\ / f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \forall x \in [a,b]}$

Consideraciones

$f(x)$ tiene un mínimo absoluto en x_m y un máximo absoluto en x_M

Figuras.



Teorema de Weierstrass.

Enunciado.

Teorema de Weierstrass. ✍

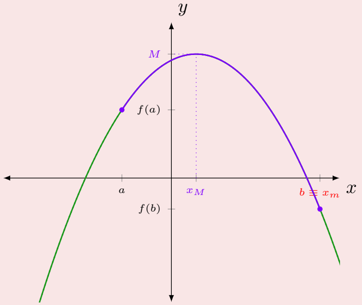
- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
- $\boxed{\Rightarrow \exists\ x_m, x_M \in [a, b]\ / f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \forall x \in [a, b]}$

Consideraciones

$f(x)$ tiene un mínimo absoluto en x_m y un máximo absoluto en x_M

☞ El mínimo o el máximo puede estar en a o en b.

Figuras.



Teorema de Weierstrass. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
- $\boxed{\Rightarrow \exists\ x_m, x_M \in [a, b]\ / f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \forall x \in [a, b]}$

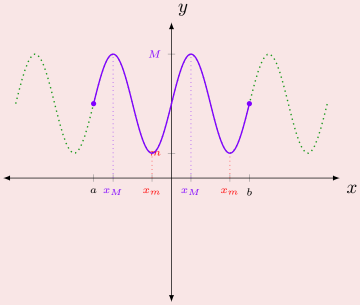
Consideraciones

$f(x)$ tiene un mínimo absoluto en x_m y un máximo absoluto en x_M

☞ El mínimo o el máximo puede estar en a o en b.

☞ x_m o x_M pueden tomar más de un valor.

Figuras.



Teorema de Weierstrass. ✍

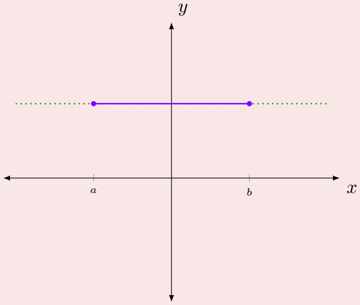
- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
- $\boxed{\Rightarrow \exists\ x_m, x_M \in [a, b]\ / f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \forall x \in [a, b]}$

Consideraciones

$f(x)$ tiene un mínimo absoluto en x_m y un máximo absoluto en x_M

- ☞ El mínimo o el máximo puede estar en a o en b.
- ☞ x_m o x_M pueden tomar más de un valor.
- ☞ Podría incluso haber infinitos valores para x_m o x_M

Figuras.



Enlaces a algunas aplicaciones

Algunas aplicaciones de GeoGebra:

- Continuidad en un punto ⇒ https://www.geogebra.org/m/junagd7t
- Teoremas de continuidad y derivabilidad ⇒ https://www.geogebra.org/m/xtvr3pmk