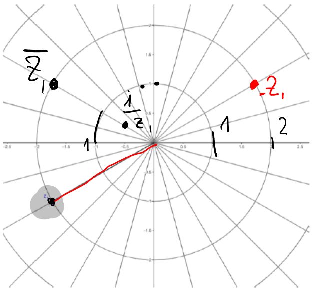
1. (*15 puntos*) Observa el número complejo z_1 de la figura. Representa sobre la figura el opuesto, el conjugado y el inverso, indicando sus valores (en forma polar).



$$z_1 = 2_{210^\circ} = a+bi$$

$$-z_1 = -a-bi = 2_{30^\circ} = 2_{210-180^\circ} = 2_{30^\circ}$$

$$\bar{z}_1 = a-bi = 2_{180-30^\circ} = 2_{150^\circ}$$

$$\frac{1}{z_1} = 1 : z_1 = 1_{0^\circ} : 2_{210^\circ} = \left(\frac{1}{2}\right)_{0-210^\circ} = \left(\frac{1}{2}\right)_{360-210} = \left(\frac{1}{2}\right)_{150^\circ}$$

2. (*15 puntos*) Demuestra que la sucesión de término general $b_n = \dfrac{\cos(n)}{n+1}$ tiene por límite 0.

$$-1 < \cos(n) < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$$

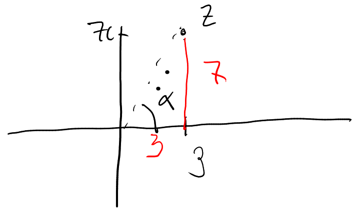
$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |b_n| = 0$$

$$0 < \left|\frac{\cos(n)}{n+1}\right| < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

Por el criterio de comparación $|b_n| \to 0$ (entre 0 y $\frac{1}{n} \to 0$)

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

3. (*15 puntos*) Calcula las raíces cúbicas del número complejo $3 + 7i$. Si hay raíces, redondea a las décimas y los ángulos (en grados) a las unidades.

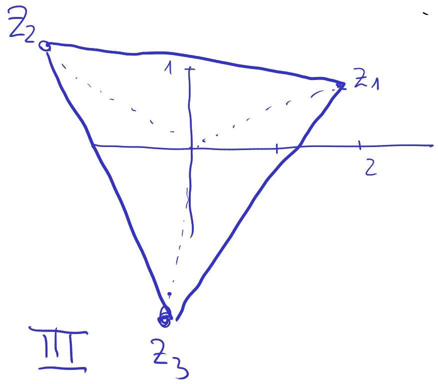


$m = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58} \simeq 7{,}1$

$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{7}{3} = 67^\circ$

$$z = 7{,}1_{67^\circ} \Rightarrow \sqrt[3]{z} = \begin{cases} \sqrt[3]{7{,}1}_{\frac{67^\circ}{3}} \simeq 1{,}9_{22^\circ} = 1{,}9(\cos 22^\circ + i \operatorname{Sen} 22^\circ) \\ z_1 = 1{,}8 + 0{,}7 \cdot i \\ \sqrt[3]{7{,}1}_{\frac{67}{3} + 120^\circ} \simeq 1{,}9_{142^\circ} = 1{,}9(\cos 142 + i \operatorname{Sen} 142) \\ z_2 = -0{,}8 + 2{,}2 i \\ \sqrt[3]{7{,}1}_{\frac{67}{3} + 240^\circ} \simeq 1{,}9_{262^\circ} = 1{,}9(\cos 262^\circ + i \operatorname{Sen} 142) \end{cases}$$

$z_3 = -0{,}3 - 1{,}9 i$



4. En este ejercicio no se pide determinar el valor de la razón trigonométrica, sino reducir el cálculo de la razón a la de un ángulo entre 0° y 45°. Por ejemplo:

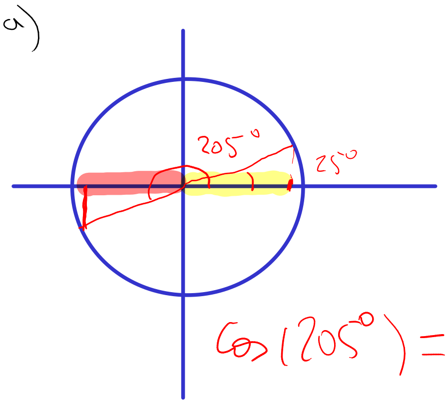
$$\sin(300°) = -\cos(30°)$$

sería una respuesta válida. Incluye dibujos de la circunferencia goniométrica para explicar el cálculo

(a) (*10 puntos*) cos(205°) $205^\circ = 180 + 25^\circ$

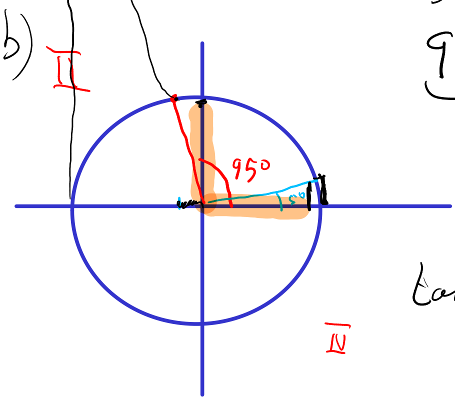
(b) (*10 puntos*) tan(2255°) < 0

a)



$\cos(205^\circ) = -\cos 25^\circ$

b)



$2255^\circ \,|\, 360^\circ$

95° 6 vueltas

$2255^\circ = 6 \cdot 360^\circ + 95^\circ$

$\tan 95^\circ = \frac{\operatorname{Sen} 95^\circ}{\cos 95^\circ}$

$\tan 95^\circ = \frac{\operatorname{Sen} 95}{\cos 95} = \frac{\cos 5^\circ}{-\operatorname{Sen} 5^\circ} = -\operatorname{Cotg} 5^\circ$

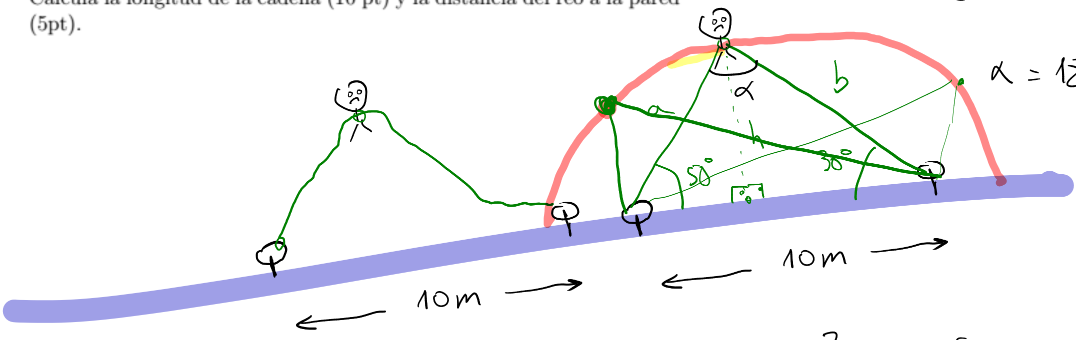
$\boxed{\tan 95^\circ = -\frac{1}{\tan 5^\circ}}$

5. (*15 puntos*) Un reo está encarcelado en una celda medieval. En la pared hay dos argollas separadas 10m entre sí. Al encarcelarle, el soldado ató al prisionero con una cadena, sujetando los extremos de la cadena en cada argolla, y el reo mediante un mosquetón atado a su cintura. De esa forma el prisionero se puede mover por la celda unido siempre en dos puntos a la pared. En un momento dado, el pobre prisionero se aleja al máximo de la pared, quedando la cadena tensa. Esta forma unos ángulos en las argollas de 50º y 30º respecto de la pared.

Calcula la longitud de la cadena (10 pt) y la distancia del reo a la pared (5pt).

$$\frac{\operatorname{Sen} 50}{b} = \frac{\operatorname{Sen} \alpha}{10} = \frac{\operatorname{Sen} 100}{10}$$

$\alpha = 180 - 80 = 100^\circ$



$$\Rightarrow b = \frac{\operatorname{Sen} 50 \cdot 10}{\operatorname{Sen} 100} \simeq 7{,}8 \text{ m}$$

$$\frac{\operatorname{Sen} 30}{a} = \frac{\operatorname{Sen} 100}{10} \Rightarrow a = \frac{10 \cdot \operatorname{Se} 30}{\operatorname{Sen} 100} \simeq 5{,}1 \text{ m}$$

La cadena mide $5{,}1 + 7{,}8 = 12{,}9$ m

$\operatorname{Sen} 50 = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \operatorname{Se} 50$

$h = 5{,}1 \cdot \operatorname{Sen} 50 = 3{,}9$ m

$h = 3{,}9$ m (dist entre el reo y la pared)

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

(a) (*10 puntos*) $2^{3x+1} = 5^x$

(b) (*10 puntos*) $\log(x+2) = 1 + 2\log x$

a) $\log 2^{3x+1} = \log 5^x$

$(3x+1)\log 2 = x \log 5$

$(3x+1) \cdot 0{,}2 = 0{,}7x$

$3x \log 2 + \log 2 = \log 5 \cdot x$

$3 \log 2 \, x - \log 5 \, x = -\log 2$

$(3\log 2 - \log 5)x = -\log 2$

$$x = \frac{-\log 2}{3\log 2 - \log 5} = \frac{\log 2^{-1}}{\log(2^3/5)} = \frac{\log 1/2}{\log 8/5}$$

$$x \simeq \frac{-0.2}{-0.3 - 0.7} = \frac{2}{3-7} = \frac{2}{-4} \simeq -0{,}5$$

$$\log(x+2) = 1 + 2\log x \qquad\qquad \log \bigcirc = \log \triangle$$

$$\log(x+2) = \log 10 + \log x^2$$

$$\log x+2 = \log 10x^2 \quad \Rightarrow \quad x+2 = 10x^2$$

$$10x^2 - x - 2 = 0 \qquad x = \frac{+1 \pm \sqrt{1+80}}{20}$$

$$= \frac{+1 \pm 9}{20} = \begin{cases} 1/2 \\ -8/20 = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$\boxed{x = 1/2}$ ✓ $\quad \cancel{x = -\frac{2}{5}}$

$$\log \underline{\underline{\frac{5}{2}}} = 1 + 2\log\frac{1}{2}$$

$$= 1 + \log\frac{1}{4} = \log 10 + \log\frac{1}{4} = \log\frac{10}{4} =$$

$$= \log\frac{5}{2}$$