Cónicas.

David Matellano.

Departamento de Matemáticas. IES Ángel Corella. (Colmenar Viejo)

4 de marzo de 2020

Índice de contenidos I

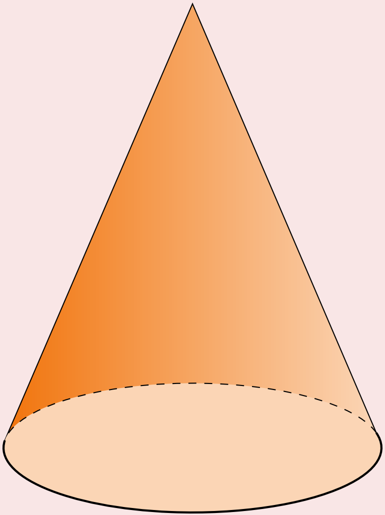
Índice de contenidos II

- La parábola como lugar geométrico
- Ecuaciones de la parábola

Curva cónica

- Se define una cónica como la curva obtenida de la intersección de un cono con un plano.

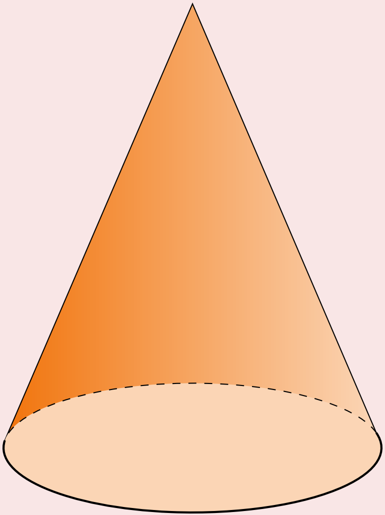
Figuras



Curva cónica

- Se define una cónica como la curva obtenida de la intersección de un cono con un plano.
- Hay 4 tipos de cónicas:

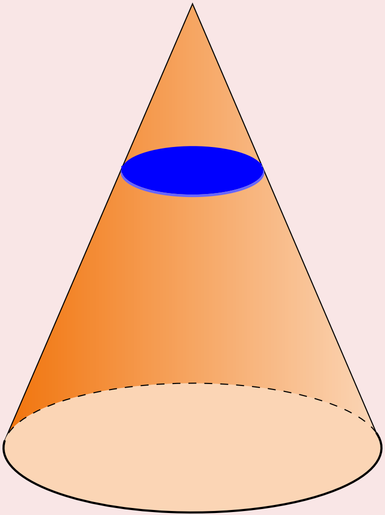
Figuras



Curva cónica

- Se define una cónica como la curva obtenida de la intersección de un cono con un plano.
- Hay 4 tipos de cónicas:
  - ☞ Circunferencia

Figuras

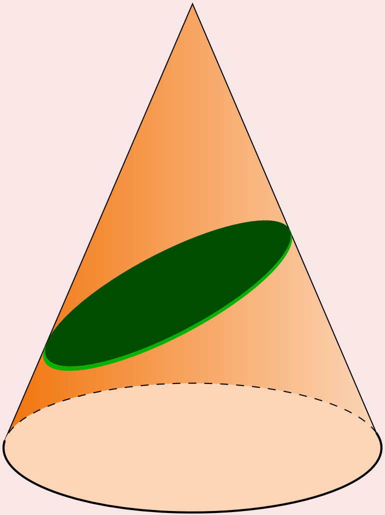


Curva cónica

- Se define una cónica como la curva obtenida de la intersección de un cono con un plano.
- Hay 4 tipos de cónicas:

  ☞ Elipse

Figuras

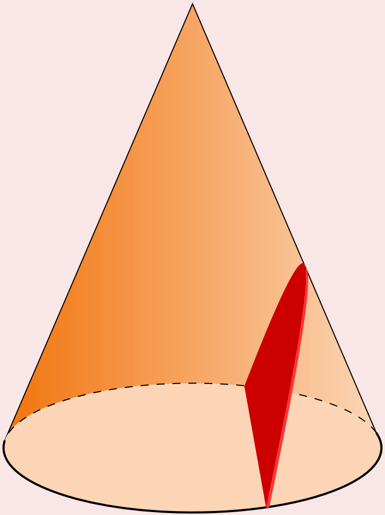


Curva cónica

- Se define una cónica como la curva obtenida de la intersección de un cono con un plano.
- Hay 4 tipos de cónicas:

  ☞ Parábola

Figuras

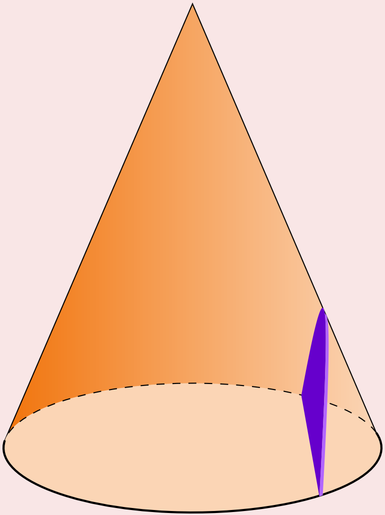


Curva cónica

- Se define una cónica como la curva obtenida de la intersección de un cono con un plano.
- Hay 4 tipos de cónicas:

  ☞ Hipérbola

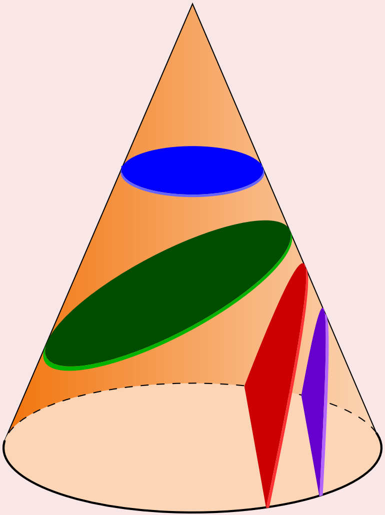
Figuras



Curva cónica

- Se define una cónica como la curva obtenida de la intersección de un cono con un plano.
- Hay 4 tipos de cónicas:
  - Circunferencia
  - Elipse
  - Parábola
  - Hipérbola

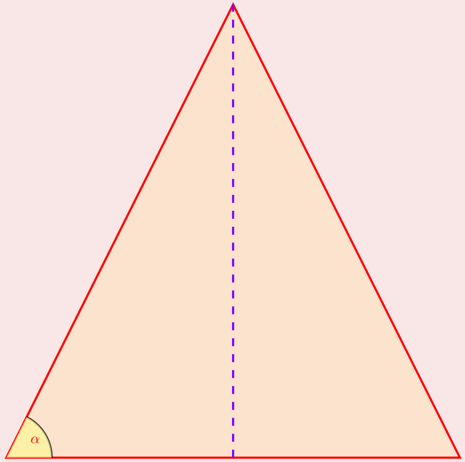
Figuras



Dado un cono y un plano

- Sea α el ángulo que forma la directriz con la base.

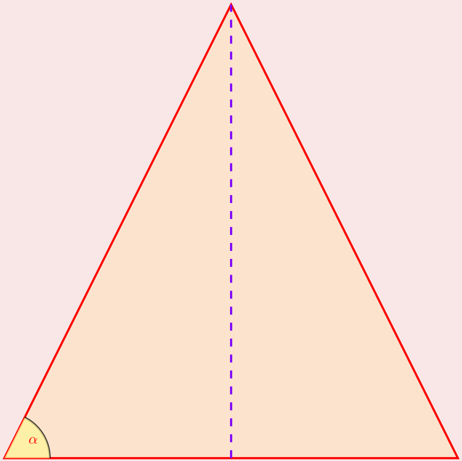
Sección transversal cono-plano



Dado un cono y un plano

- Sea α el ángulo que forma la directriz con la base.
- Sea β el ángulo que forma el plano cortante con la base.

Sección transversal cono-plano

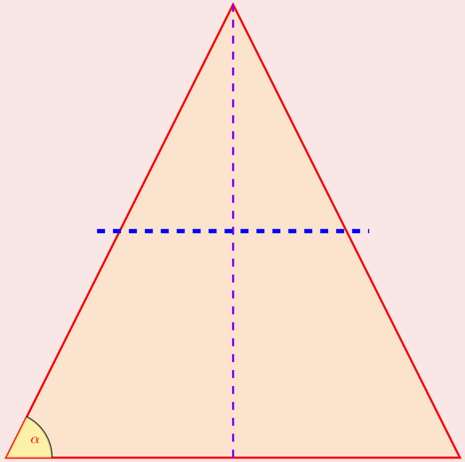


Dado un cono y un plano

- Sea α el ángulo que forma la directriz con la base.
- Sea β el ángulo que forma el plano cortante con la base.

☞ Si $\beta = 0 \Rightarrow$ circunferencia.

Sección transversal cono-plano



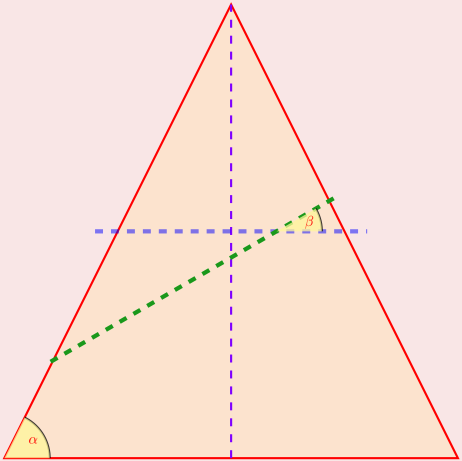
Dado un cono y un plano

- Sea α el ángulo que forma la directriz con la base.
- Sea β el ángulo que forma el plano cortante con la base.

☞ Si $\beta = 0 \Rightarrow$ circunferencia.

☞ Si $0 < \beta < \alpha \Rightarrow$ elipse.

Sección transversal cono-plano



Dado un cono y un plano

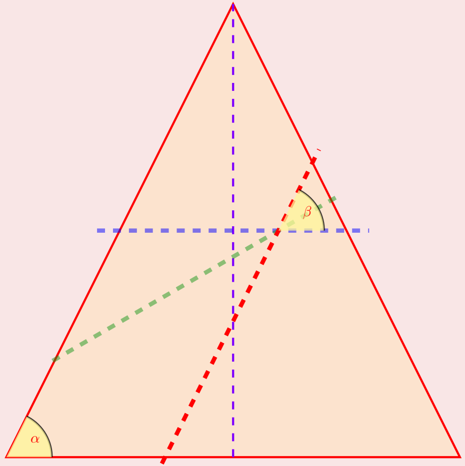
- Sea α el ángulo que forma la directriz con la base.
- Sea β el ángulo que forma el plano cortante con la base.

☞ Si $\beta = 0 \Rightarrow$ circunferencia.

☞ Si $0 < \beta < \alpha \Rightarrow$ elipse.

☞ Si $\beta = \alpha \Rightarrow$ parábola.

Sección transversal cono-plano



Dado un cono y un plano

- Sea α el ángulo que forma la directriz con la base.
- Sea β el ángulo que forma el plano cortante con la base.

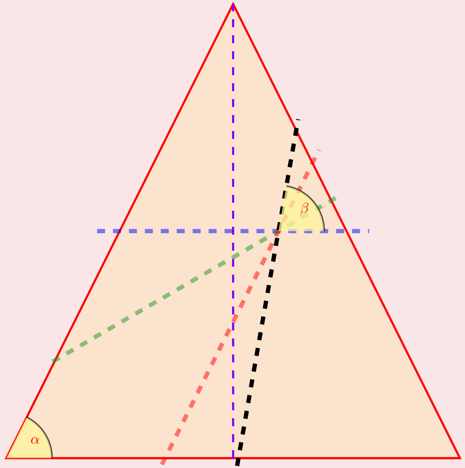
☞ Si $\beta = 0 \Rightarrow$ circunferencia.

☞ Si $0 < \beta < \alpha \Rightarrow$ elipse.

☞ Si $\beta = \alpha \Rightarrow$ parábola.

☞ Si $\alpha < \beta \leq 90^\circ$ hipérbola.

Sección transversal cono-plano

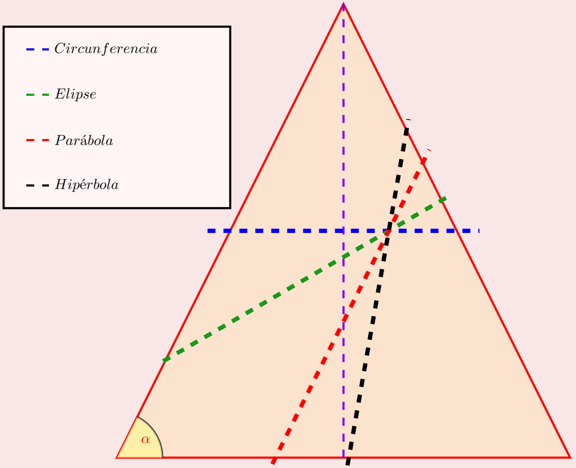


Dado un cono y un plano

- Sea α el ángulo que forma la directriz con la base.
- Sea β el ángulo que forma el plano cortante con la base.

☞ Si $\beta = 0 \Rightarrow$ circunferencia.
☞ Si $0 < \beta < \alpha \Rightarrow$ elipse.
☞ Si $\beta = \alpha \Rightarrow$ parábola.
☞ Si $\alpha < \beta \leq 90^\circ$ hipérbola.

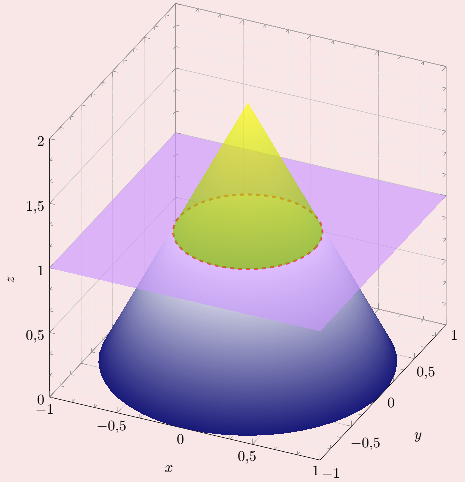
Sección transversal cono-plano



Obtención de una circunferencia

- Corte de un cono con un plano paralelo a su base

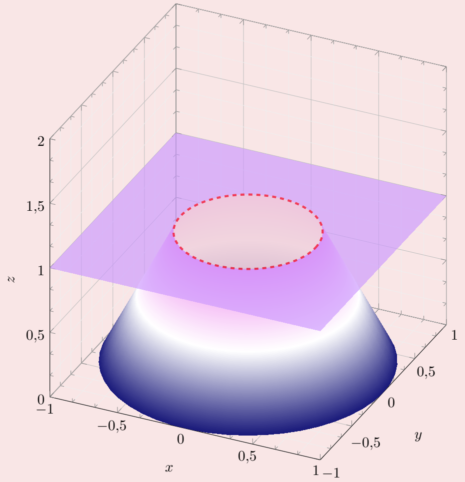
Figuras



Obtención de una circunferencia

- Corte de un cono con un plano paralelo a su base

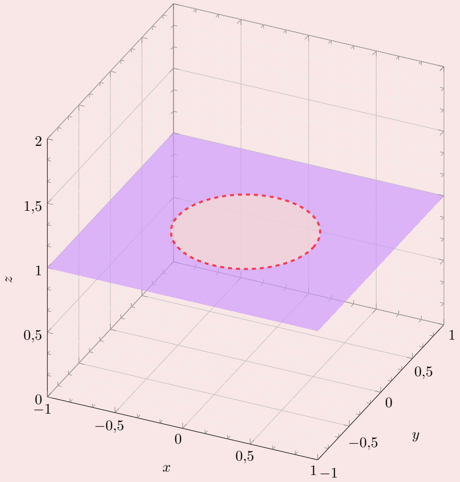
Figuras



Obtención de una circunferencia

- Corte de un cono con un plano paralelo a su base

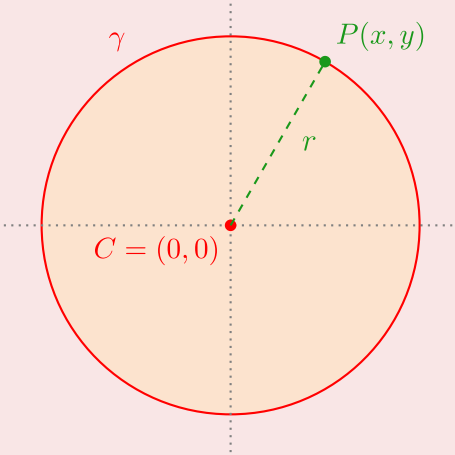
Figuras



Definición de circunferencia. ✍

☞ Conjunto de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro una distancia llamada radio.

Figuras



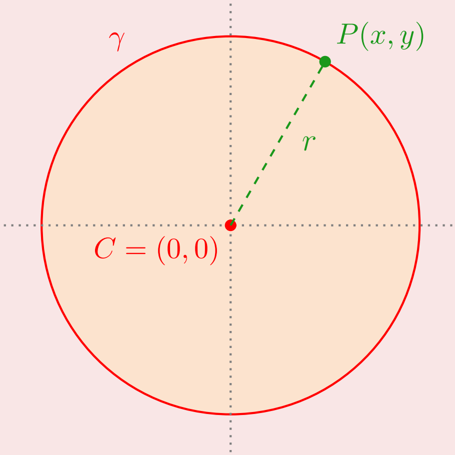
Definición de circunferencia. ✍

☞ Conjunto de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro una distancia llamada radio.

Ecuación canónica de la circunferencia ✍

- Sea γ una circunferencia de centro $C = (0, 0)$ y radio r:

Figuras



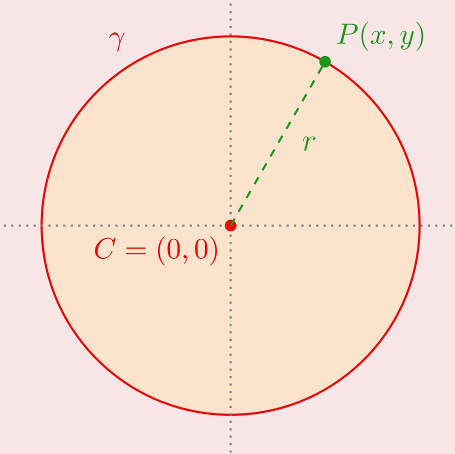
Definición de circunferencia. ✍

☞ Conjunto de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro una distancia llamada radio.

Ecuación canónica de la circunferencia ✍

- Sea γ una circunferencia de centro $C = (0, 0)$ y radio r:
- Imponemos: $d(P, C) = r \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = r$

Figuras



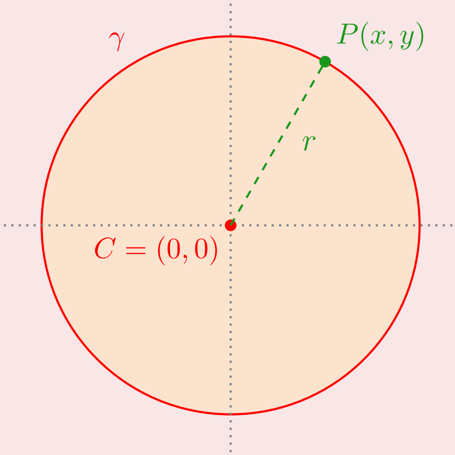
Definición de circunferencia. ✍

☞ Conjunto de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro una distancia llamada radio.

Ecuación canónica de la circunferencia ✍

- Sea γ una circunferencia de centro $C = (0,0)$ y radio r:
- Imponemos: $d(P,C) = r \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = r$
- Elevando al cuadrado obtenemos la ecuación:

Figuras



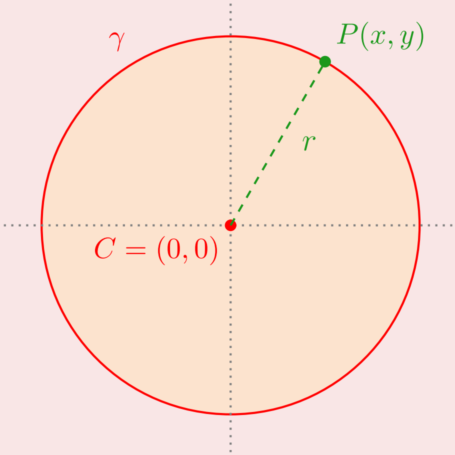
Definición de circunferencia. ✍

☞ Conjunto de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro una distancia llamada radio.

Ecuación canónica de la circunferencia ✍

- Sea γ una circunferencia de centro $C = (0,0)$ y radio r:
- Imponemos: $d(P,C) = r \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = r$
- Elevando al cuadrado obtenemos la ecuación:
- $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$

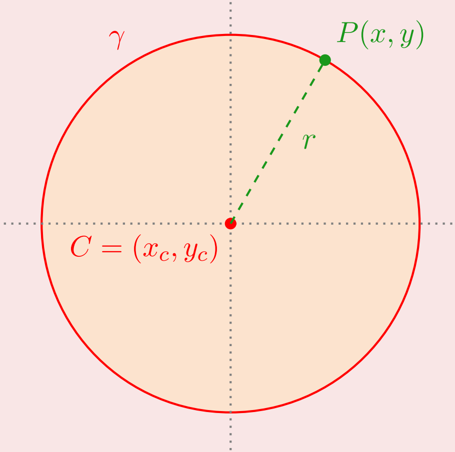
Figuras



Ecuación canónica dado r y C. ✍

- Sea γ una circunferencia de radio r y centro $C = (x_c, y_c)$

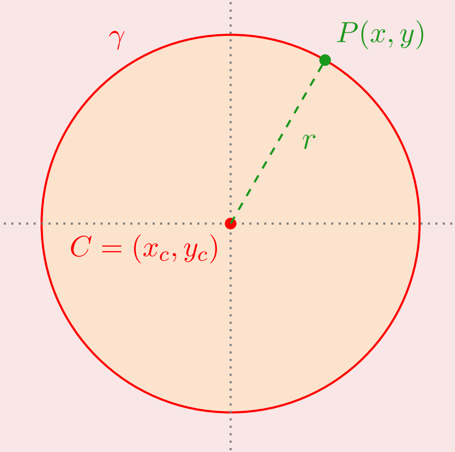
Figuras



Ecuación canónica dado r y C. ✍

- Sea γ una circunferencia de radio r y centro $C = (x_c, y_c)$
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

Figuras

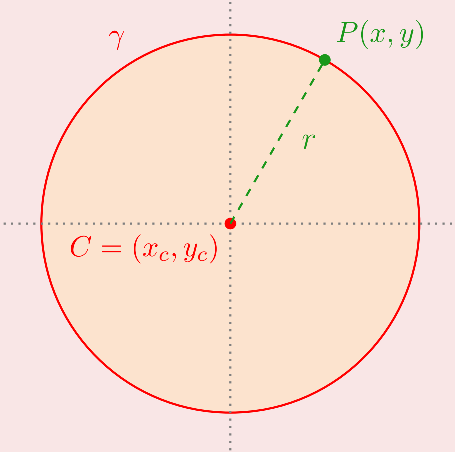


Ecuación canónica dado r y C. ✍

- Sea γ una circunferencia de radio r y centro $C = (x_c, y_c)$
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

☞ $P \in \gamma \Leftrightarrow d(P, C) = r$

Figuras



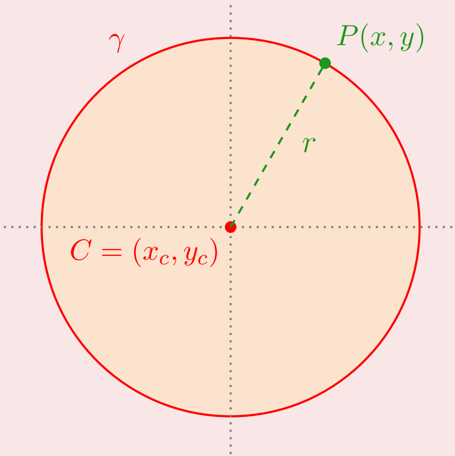
Ecuación canónica dado r y C. ✍

- Sea γ una circunferencia de radio r y centro $C = (x_c, y_c)$
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

☞ $P \in \gamma \Leftrightarrow d(P, C) = r$

- Imponemos la condición anterior y elevamos al cuadrado:

Figuras



Ecuación canónica dado r y C. ✍

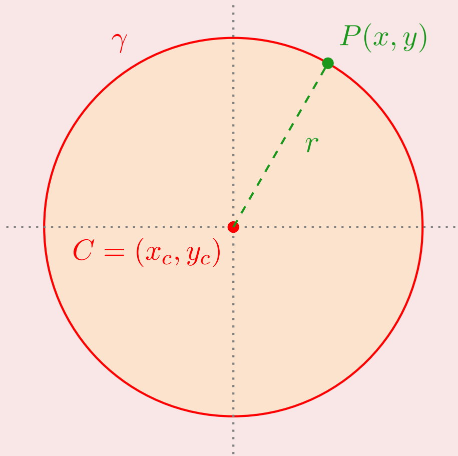
- Sea γ una circunferencia de radio r y centro $C = (x_c, y_c)$
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

☞ $P \in \gamma \Leftrightarrow d(P, C) = r$

- Imponemos la condición anterior y elevamos al cuadrado:

☞ $\sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} = r$

Figuras



Ecuación canónica dado r y C. ✍

- Sea γ una circunferencia de radio r y centro $C = (x_c, y_c)$
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

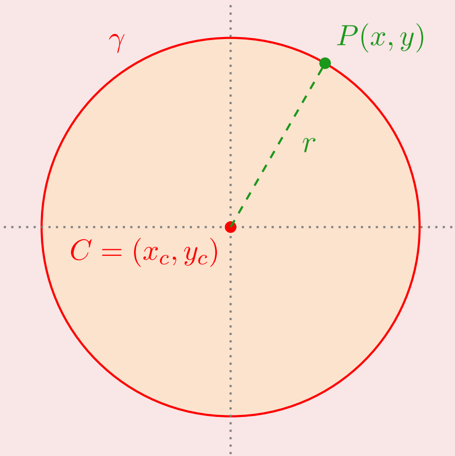
☞ $P \in \gamma \Leftrightarrow d(P, C) = r$

- Imponemos la condición anterior y elevamos al cuadrado:

☞ $\sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} = r$

✍ $\boxed{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2}$

Figuras



A partir de la ecuación canónica. ✍

- Sea $\gamma : (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$

A partir de la ecuación canónica. ✍

- Sea $\gamma : (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$

✎ Desarrollamos e igualamos a 0:

A partir de la ecuación canónica. ✍

- Sea $\gamma : (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$

✎ Desarrollamos e igualamos a 0:

- $x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c y + x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 0$

A partir de la ecuación canónica. ✍

- Sea $\gamma : (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$

✎ Desarrollamos e igualamos a 0:

- $x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c y + x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 0$
- Definimos los siguientes coeficientes:

A partir de la ecuación canónica. ✍

- Sea $\gamma : (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$

✎ Desarrollamos e igualamos a 0:

- $x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c y + x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 0$
- Definimos los siguientes coeficientes:

☞ $$\begin{cases} A = -2x_c \\ B = -2y_c \\ C = x_c^2 + y_c^2 - r^2 \end{cases}$$

A partir de la ecuación canónica. ✍

- Sea $\gamma : (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$

✎ Desarrollamos e igualamos a 0:

- $x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c y + x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 0$
- Definimos los siguientes coeficientes:

☞ $$\begin{cases} A = -2x_c \\ B = -2y_c \\ C = x_c^2 + y_c^2 - r^2 \end{cases}$$

- Así, obtenemos la ecuación general de la circunferencia:

A partir de la ecuación canónica. ✍

- Sea $\gamma : (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$

✎ Desarrollamos e igualamos a 0:

- $x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c y + x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 0$
- Definimos los siguientes coeficientes:

$$☞ \begin{cases} A = -2x_c \\ B = -2y_c \\ C = x_c^2 + y_c^2 - r^2 \end{cases}$$

- Así, obtenemos la ecuación general de la circunferencia:
- $\boxed{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}$

Sea la ecuación $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ ✍

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Sea la ecuación $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ ✍

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$¿\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C > 0?$$

Sea la ecuación $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ ✍

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

¿$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C > 0$?

No.

Sea la ecuación $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ ✍

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$¿\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C > 0?$$

No.

No es una circunferencia

Sea la ecuación $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ ✍

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$¿\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C > 0?$$

Sí.

No.

No es una circunferencia

Sea la ecuación $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ ✍

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$¿\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C > 0?$$

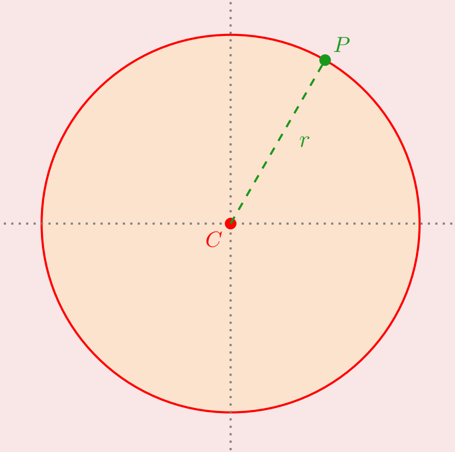
Sí.

$$r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C}; \quad x_c = -\frac{A}{2}; \quad y_c = -\frac{B}{2}$$

No.

No es una circunferencia

Figuras



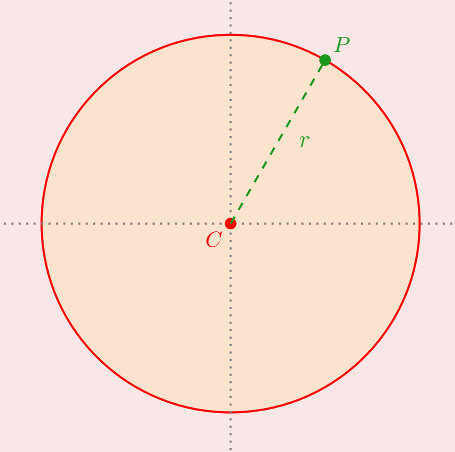
Ecuaciones paramétricas

- Sea P un punto de la circunferencia.

Ecuaciones paramétricas

- Sea P un punto de la circunferencia.
- Las coordenadas de P serán:

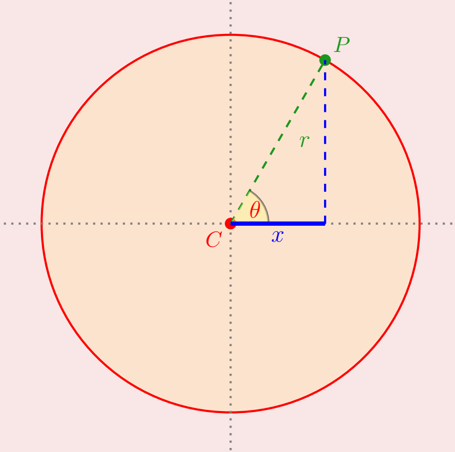
Figuras



Ecuaciones paramétricas

- Sea P un punto de la circunferencia.
- Las coordenadas de P serán:
    - $x = r\cos\theta$

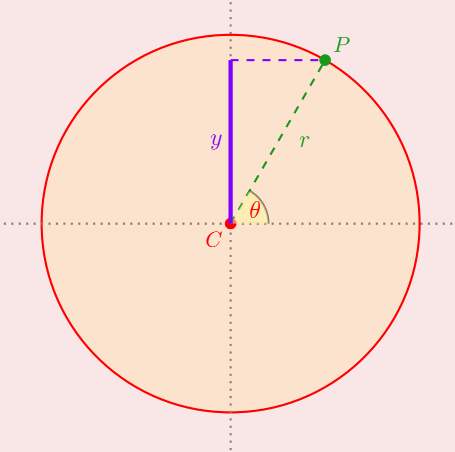
Figuras



Ecuaciones paramétricas

- Sea P un punto de la circunferencia.
- Las coordenadas de P serán:
  - $x = r \cos \theta$
  - $y = r \operatorname{sen} \theta$

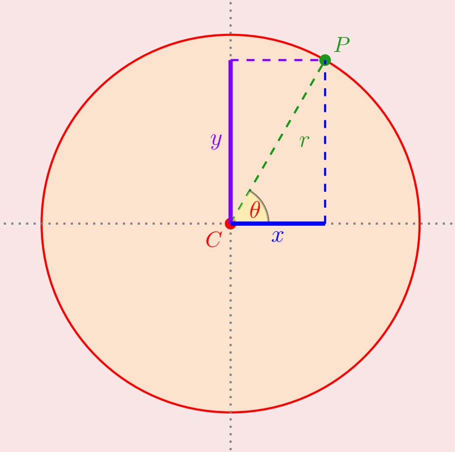
Figuras



Ecuaciones paramétricas

- Sea P un punto de la circunferencia.
- Las coordenadas de P serán:
  - $x = r\cos\theta$
  - $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$
- Así, las ecuaciones paramétricas son:

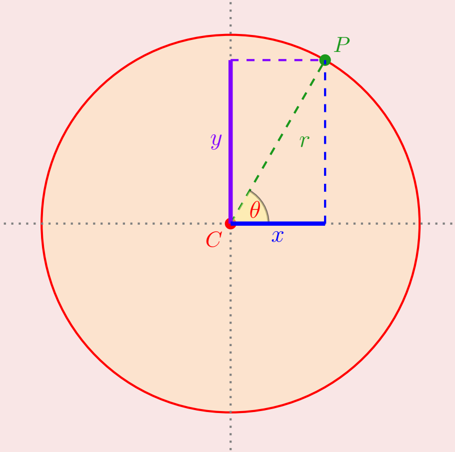
Figuras



Ecuaciones paramétricas

- Sea P un punto de la circunferencia.
- Las coordenadas de P serán:
  - $x = r\cos\theta$
  - $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$
- Así, las ecuaciones paramétricas son:
- $$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right. ,\forall\theta \in [0, 2\pi]}$$

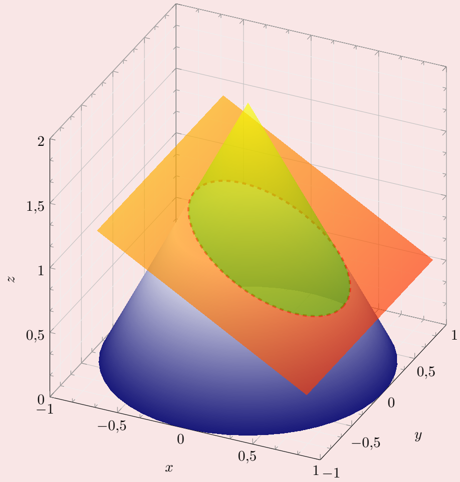
Figuras



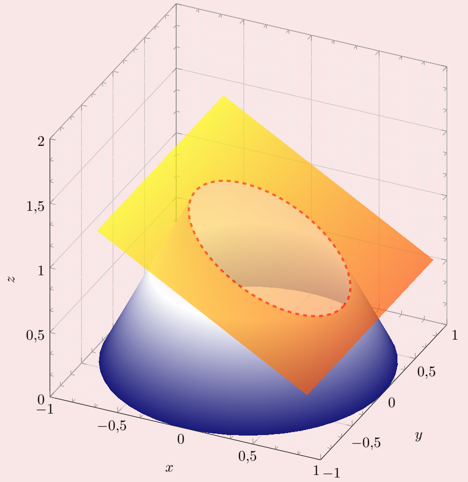
Obtención de una elipse

- Corte de un cono con un plano oblicuo a la base con una inclinación menor que la de la generatriz.

Figuras



Figuras



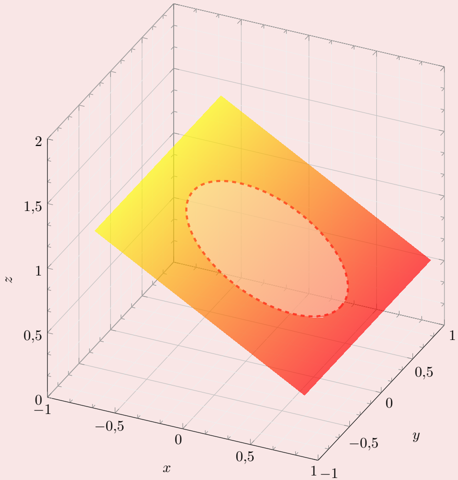
Obtención de una elipse

- Corte de un cono con un plano oblicuo a la base con una inclinación menor que la de la generatriz.

Obtención de una elipse

- Corte de un cono con un plano oblicuo a la base con una inclinación menor que la de la generatriz.

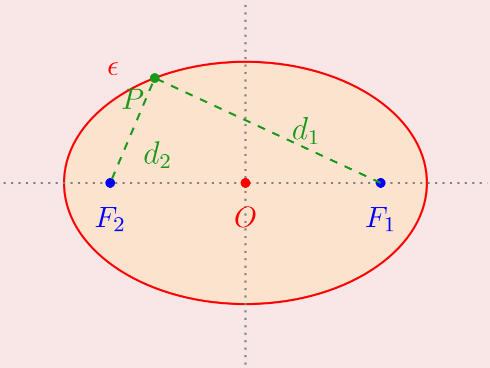
Figuras



Definición de elipse. ✍

☞ Conjunto de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante, igual a $2a$.

Figuras



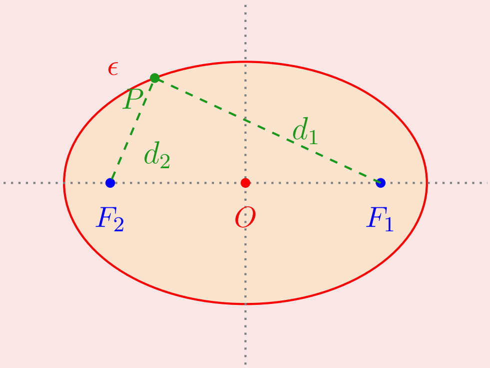
Definición de elipse. ✍

☞ Conjunto de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante, igual a $2a$.

Ecuación canónica de la elipse ✍

- Sea ϵ una elipse de focos F_1, F_2 y $2a$:

Figuras



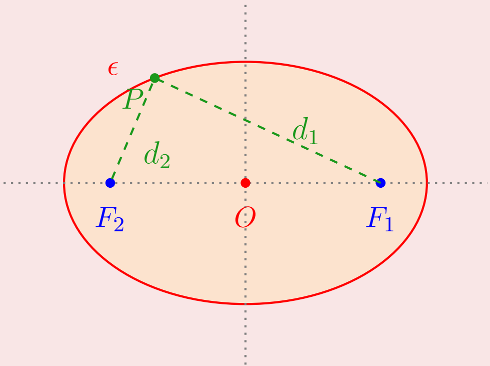
Definición de elipse. ✍

☞ Conjunto de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante, igual a $2a$.

Ecuación canónica de la elipse ✍

- Sea ϵ una elipse de focos F_1, F_2 y $2a$:
- Imponemos: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \Rightarrow$
$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$

Figuras



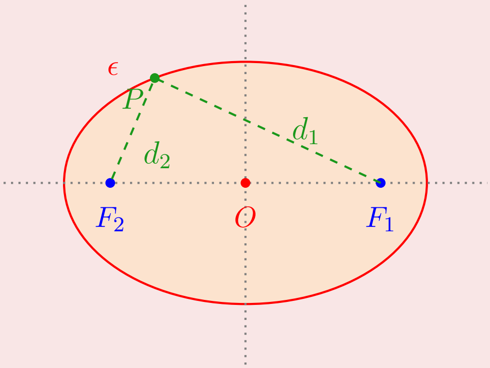
Definición de elipse. ✍

☞ Conjunto de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante, igual a $2a$.

Ecuación canónica de la elipse ✍

- Sea ϵ una elipse de focos F_1, F_2 y $2a$:
- Imponemos: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \Rightarrow$
  $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$
- Elevando al cuadrado dos veces la igualdad:

Figuras



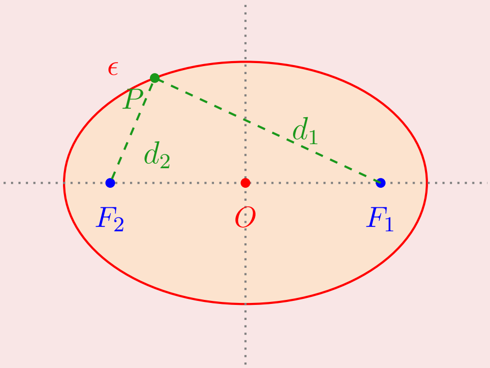
Definición de elipse. ✍

☞ Conjunto de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante, igual a $2a$.

Ecuación canónica de la elipse ✍

- Sea ϵ una elipse de focos F_1, F_2 y $2a$:
- Imponemos: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \Rightarrow$
  $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$
- Elevando al cuadrado dos veces la igualdad:
- $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow$
  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$

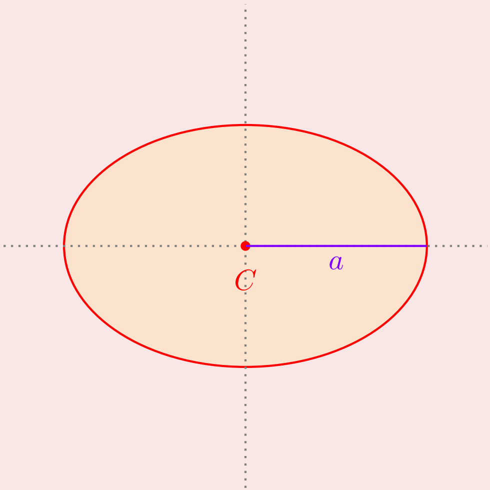
Figuras



Relación entre a, b y c

- a es el semieje mayor de la elipse.

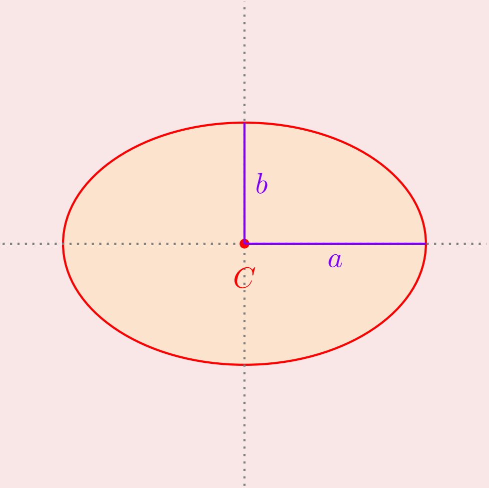
Figuras



Relación entre a, b y c

- a es el semieje mayor de la elipse.
- b es el semieje menor de la elipse.

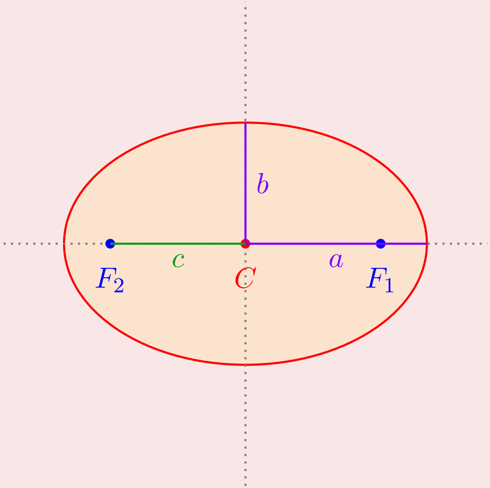
Figuras



Relación entre a, b y c

- a es el semieje mayor de la elipse.
- b es el semieje menor de la elipse.
- c es la semidistancia focal.

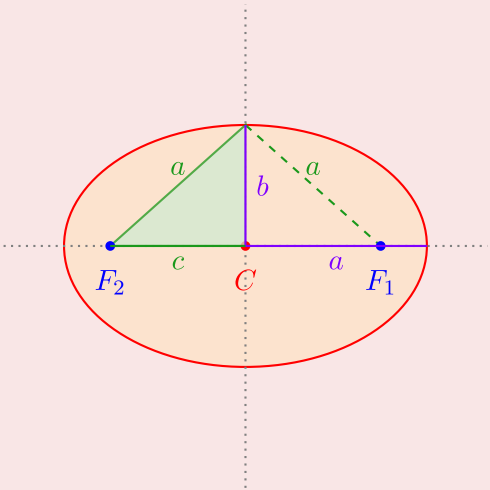
Figuras



Relación entre a, b y c

- ☞ a es el semieje mayor de la elipse.
- ☞ b es el semieje menor de la elipse.
- ☞ c es la semidistancia focal.
- ☞ $[a, b, c]$ forman una terna pitagórica:

Figuras

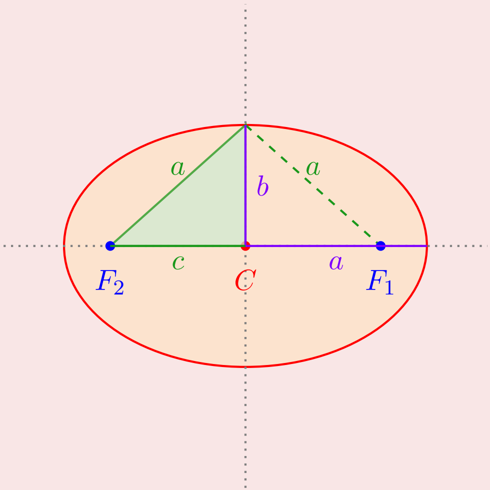


Relación entre a, b y c

- a es el semieje mayor de la elipse.
- b es el semieje menor de la elipse.
- c es la semidistancia focal.
- $[a, b, c]$ forman una terna pitagórica:

✍ $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

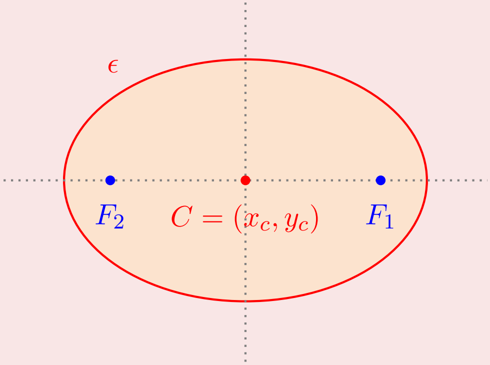
Figuras



Ecuación canónica con centro C. ✍

- Sea ϵ una elipse de semiejes a y b $(a > b)$, centro $C = (x_c, y_c)$, ejes paralelos a los ejes coordenados: $F_1 = (x_c + c, y_c)$; $F_2 = (x_c - c, y_c)$

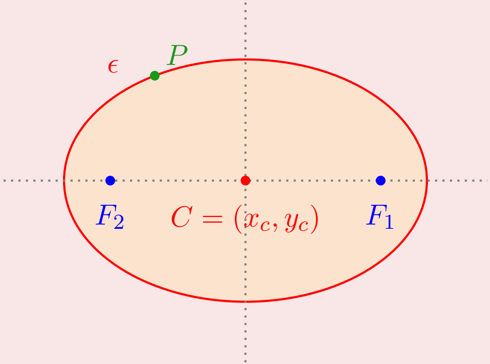
Figuras



Ecuación canónica con centro C. ✍

- Sea ϵ una elipse de semiejes a y b $(a > b)$, centro $C = (x_c, y_c)$, ejes paralelos a los ejes coordenados: $F_1 = (x_c + c, y_c)$; $F_2 = (x_c - c, y_c)$
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

Figuras

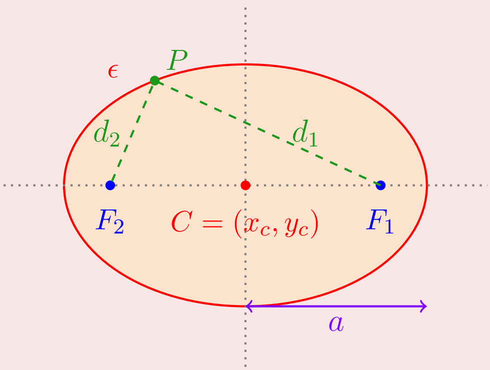


Ecuación canónica con centro C. ✍

- Sea ϵ una elipse de semiejes a y b $(a > b)$, centro $C = (x_c, y_c)$, ejes paralelos a los ejes coordenados: $F_1 = (x_c + c, y_c)$; $F_2 = (x_c - c, y_c)$
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

☞ $P \in \epsilon \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

Figuras



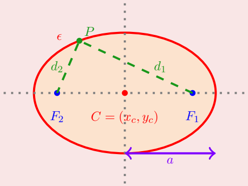
Ecuación canónica con centro C. ✍

- Sea ϵ una elipse de semiejes a y b $(a > b)$, centro $C = (x_c, y_c)$, ejes paralelos a los ejes coordenados: $F_1 = (x_c + c, y_c); F_2 = (x_c - c, y_c)$
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

☞ $P \in \epsilon \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

- Imponemos la condición anterior y elevamos al cuadrado:

Figuras



Ecuación canónica con centro C. ✍

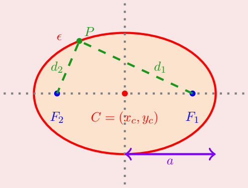
- Sea ϵ una elipse de semiejes a y b $(a > b)$, centro $C = (x_c, y_c)$, ejes paralelos a los ejes coordenados: $F_1 = (x_c + c, y_c); F_2 = (x_c - c, y_c)$
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

☞ $P \in \epsilon \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

- Imponemos la condición anterior y elevamos al cuadrado:

☞ $\sqrt{(x - x_c - c)^2 + (y - yc)^2} + \sqrt{(x - x_c + c)^2 + (y - yc)^2} = 2a$

Figuras



Ecuación canónica con centro C. ✍

- Sea ϵ una elipse de semiejes a y b $(a > b)$, centro $C = (x_c, y_c)$, ejes paralelos a los ejes coordenados: $F_1 = (x_c + c, y_c)$; $F_2 = (x_c - c, y_c)$
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

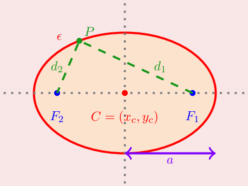
☞ $P \in \epsilon \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

- Imponemos la condición anterior y elevamos al cuadrado:

☞ $\sqrt{(x - x_c - c)^2 + (y - yc)^2} + \sqrt{(x - x_c + c)^2 + (y - yc)^2} = 2a$

✍ $\boxed{\dfrac{(x - x_c)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1}$

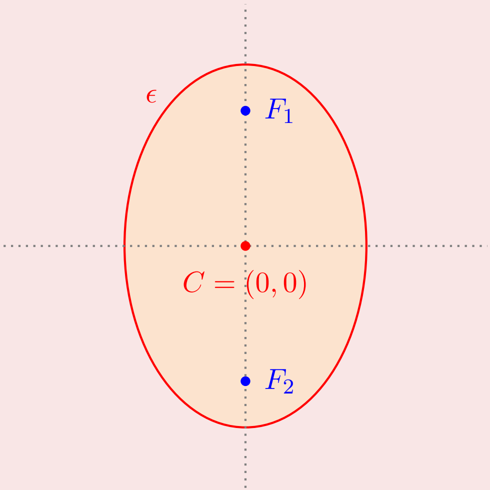
Figuras



Ecuación con los focos en el eje Y. ✍

- Sea ϵ una elipse de eje mayor $2a$, eje menor $2b$ $(a > b)$ y centro O: $F_1 = (0, c); F_2 = (0, -c)$.

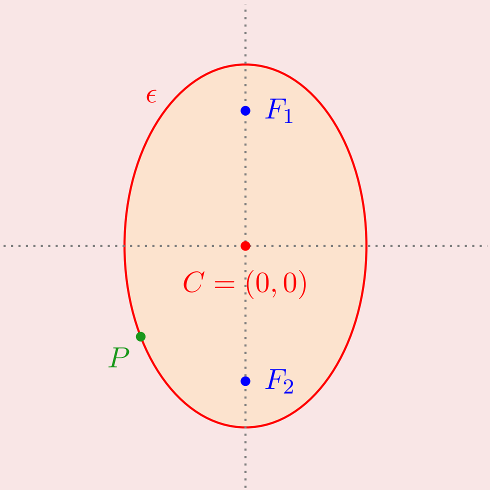
Figuras



Ecuación con los focos en el eje Y. ✍

- Sea ϵ una elipse de eje mayor $2a$, eje menor $2b$ $(a > b)$ y centro O:
  $F_1 = (0, c); F_2 = (0, -c)$.
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

Figuras

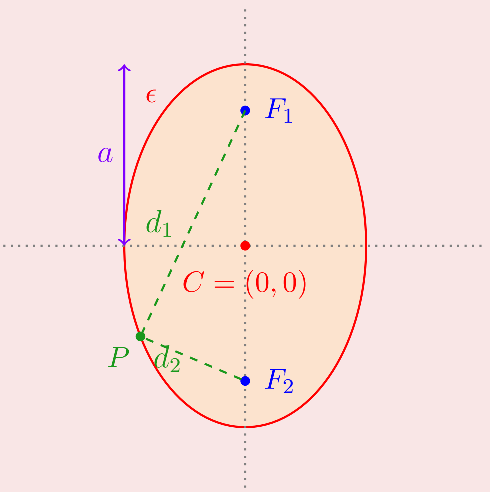


Ecuación con los focos en el eje Y. ✍

- Sea ϵ una elipse de eje mayor $2a$, eje menor $2b$ $(a > b)$ y centro O:
  $F_1 = (0, c); F_2 = (0, -c)$.
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

☞ $P \in \epsilon \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

Figuras



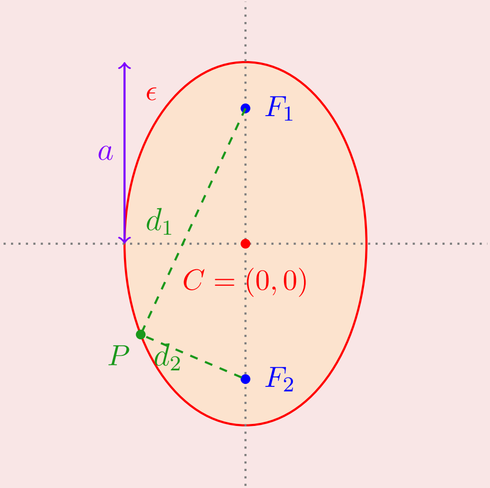
Ecuación con los focos en el eje Y. ✍

- Sea ϵ una elipse de eje mayor $2a$, eje menor $2b$ $(a > b)$ y centro O:
  $F_1 = (0, c); F_2 = (0, -c)$.
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

☞ $P \in \epsilon \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

- Imponemos la condición anterior y elevamos al cuadrado:

Figuras



Ecuación con los focos en el eje Y. ✍

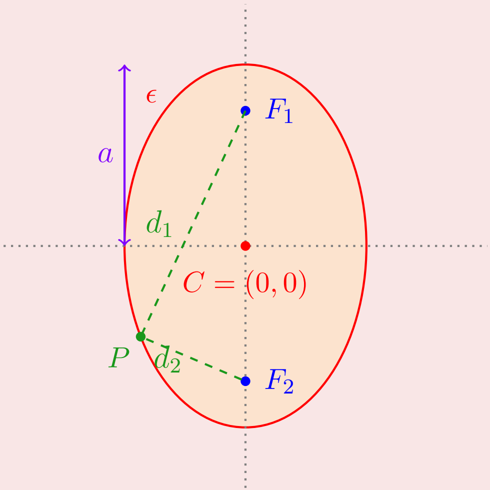
- Sea ϵ una elipse de eje mayor $2a$, eje menor $2b$ $(a > b)$ y centro O:
  $F_1 = (0, c); F_2 = (0, -c)$.
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

☞ $P \in \epsilon \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

- Imponemos la condición anterior y elevamos al cuadrado:

☞ $\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + \sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a$

Figuras



Ecuación con los focos en el eje Y. ✍

- Sea ϵ una elipse de eje mayor $2a$, eje menor $2b$ $(a > b)$ y centro O: $F_1 = (0, c); F_2 = (0, -c)$.
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

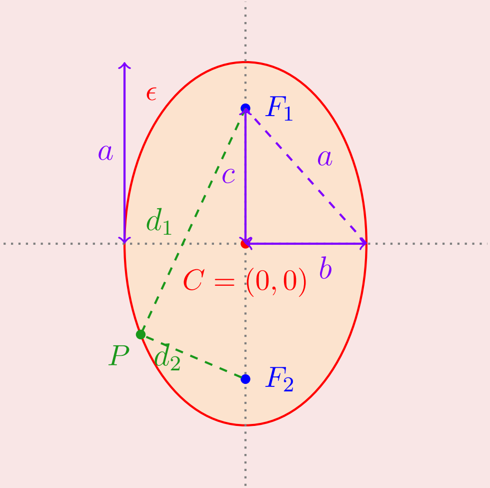
☞ $P \in \epsilon \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

- Imponemos la condición anterior y elevamos al cuadrado:

☞ $\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + \sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a$

✍ $\boxed{\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1}$

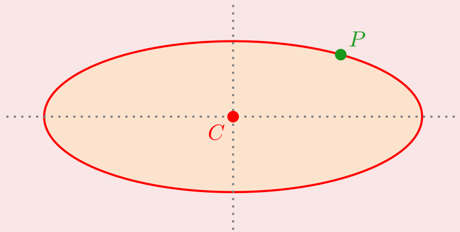
Figuras



Ecuaciones paramétricas

- Sea P un punto de la elipse.

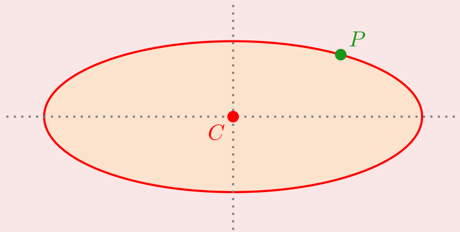
Figuras



Ecuaciones paramétricas

- Sea P un punto de la elipse.
- Las coordenadas de P serán:

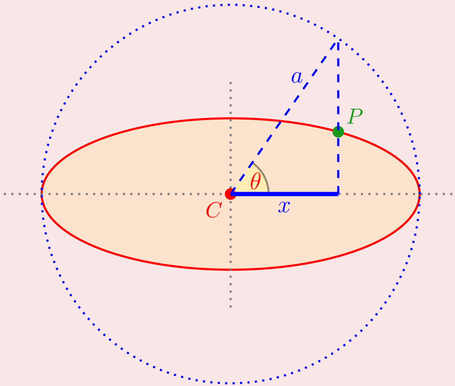
Figuras



Ecuaciones paramétricas

- Sea P un punto de la elipse.
- Las coordenadas de P serán:
  - $x = a\cos\theta$

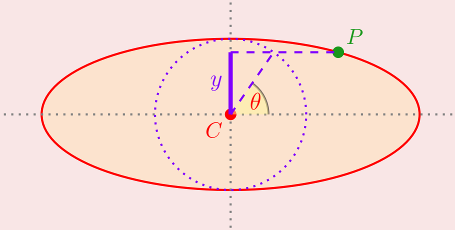
Figuras



Ecuaciones paramétricas

- Sea P un punto de la elipse.
- Las coordenadas de P serán:
  - $x = a\cos\theta$
  - $y = b\,\text{sen}\,\theta$

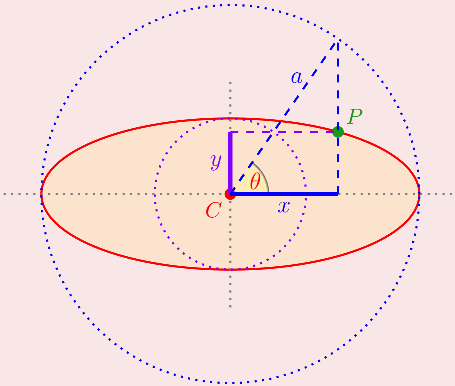
Figuras



Ecuaciones paramétricas

- Sea P un punto de la elipse.
- Las coordenadas de P serán:
  - $x = a\cos\theta$
  - $y = b\,\mathrm{sen}\,\theta$
- Así, las ecuaciones paramétricas son:

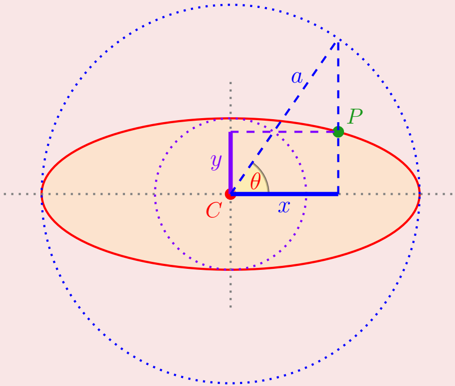
Figuras



Ecuaciones paramétricas

- Sea P un punto de la elipse.
- Las coordenadas de P serán:
  - $x = a\cos\theta$
  - $y = b\,\text{sen}\,\theta$
- Así, las ecuaciones paramétricas son:
- $\boxed{\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\,\text{sen}\,\theta \end{cases} ,\forall\theta \in [0, 2\pi]}$

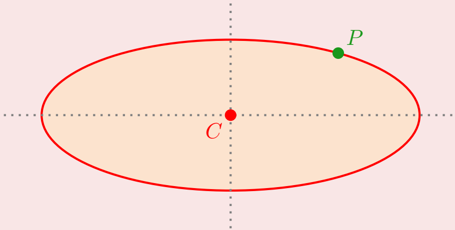
Figuras



Ecuaciones paramétricas

- Sea P un punto de la elipse.
- Las coordenadas de P serán:
  - $x = a\cos\theta$
  - $y = b\,\mathrm{sen}\,\theta$
- Así, las ecuaciones paramétricas son:
- $$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = a\cos\theta \\ y = b\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right., \forall\theta\in[0,2\pi]}$$

Figuras



Demostración

- $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{\cancel{a^2}\cos^2\theta}{\cancel{a^2}}+\frac{\cancel{b^2}\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{\cancel{b^2}}=\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\,\theta=1, \forall\theta\in[0,2\pi]$$

Excentricidad de una elipse

Definición de excentricidad

✍ Definimos la excentricidad de una cónica como el cociente de c y a:

Excentricidad de una elipse

Definición de excentricidad

✍ Definimos la excentricidad de una cónica como el cociente de c y a:

☞ $$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}$$

Excentricidad de una elipse

Definición de excentricidad

- ✍ Definimos la excentricidad de una cónica como el cociente de c y a:
- ☞ $\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}$
- ☞ En una elipse se cumple: $0 < \varepsilon < 1$

Excentricidad de una elipse

Definición de excentricidad

✍ Definimos la excentricidad de una cónica como el cociente de c y a:

☞ $\boxed{\varepsilon = \dfrac{c}{a}}$

☞ En una elipse se cumple: $0 < \varepsilon < 1$

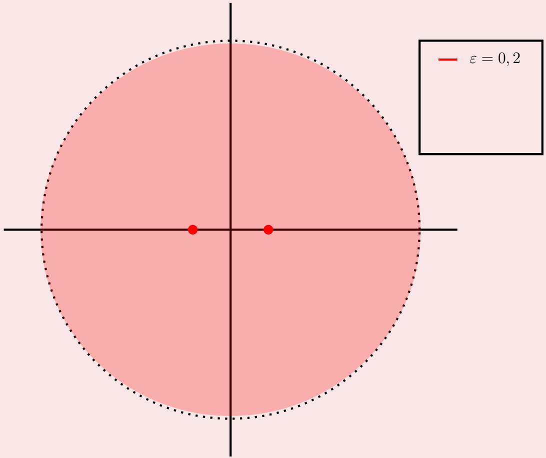
☞ Cuanto mayor sea ε , más achatada es la elipse.

Excentricidad de una elipse

Definición de excentricidad

- ✍ Definimos la excentricidad de una cónica como el cociente de c y a:
- ☞ $\boxed{\varepsilon = \dfrac{c}{a}}$
- ☞ En una elipse se cumple: $0 < \varepsilon < 1$
- ☞ Cuanto mayor sea ε , más achatada es la elipse.

Figuras

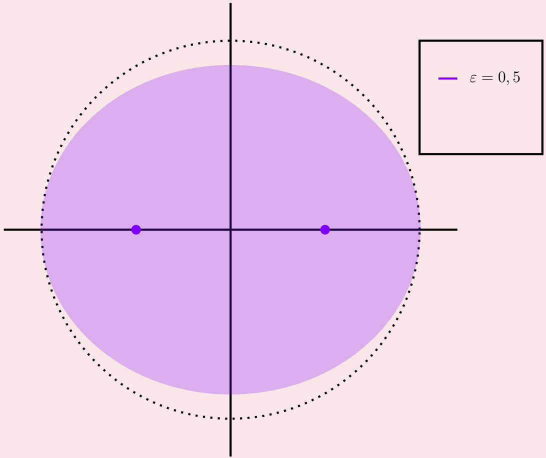


Excentricidad de una elipse

Definición de excentricidad

- ✍ Definimos la excentricidad de una cónica como el cociente de c y a:
- ☞ $\boxed{\varepsilon = \dfrac{c}{a}}$
- ☞ En una elipse se cumple: $0 < \varepsilon < 1$
- ☞ Cuanto mayor sea ε , más achatada es la elipse.

Figuras

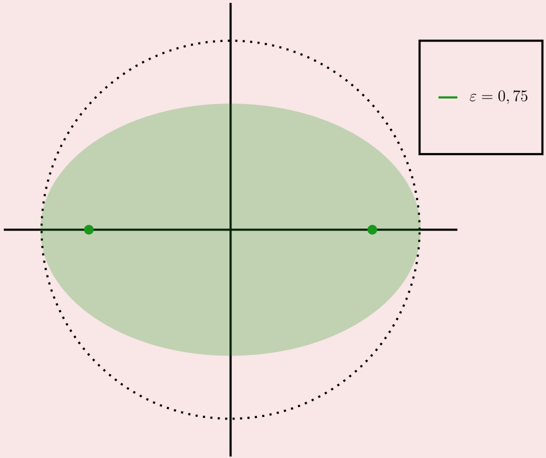


Excentricidad de una elipse

Definición de excentricidad

- ✍ Definimos la excentricidad de una cónica como el cociente de c y a:
- ☞ $\boxed{\varepsilon = \dfrac{c}{a}}$
- ☞ En una elipse se cumple: $0 < \varepsilon < 1$
- ☞ Cuanto mayor sea ε , más achatada es la elipse.

Figuras

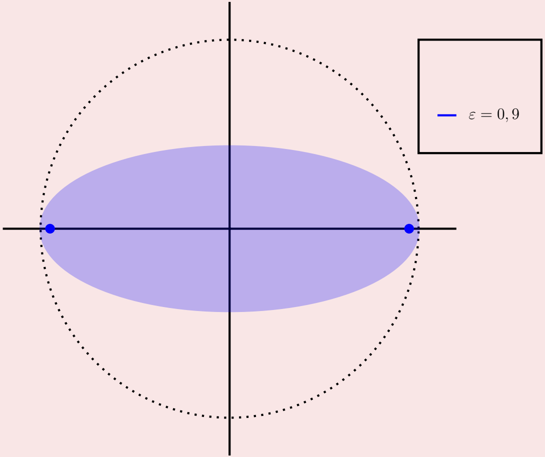


Excentricidad de una elipse

Definición de excentricidad

- Definimos la excentricidad de una cónica como el cociente de c y a:
- $\boxed{\varepsilon = \dfrac{c}{a}}$
- En una elipse se cumple: $0 < \varepsilon < 1$
- Cuanto mayor sea ε , más achatada es la elipse.

Figuras

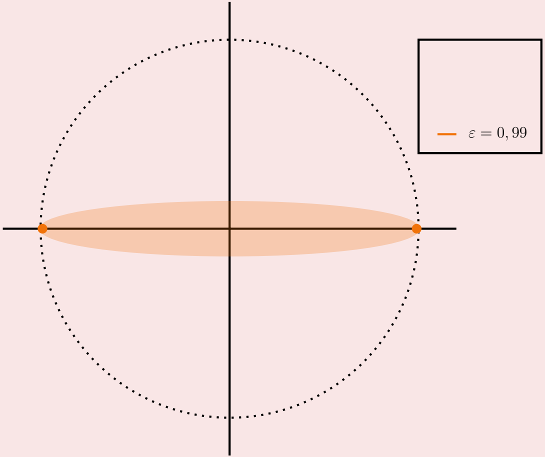


Excentricidad de una elipse

Definición de excentricidad

- ✍ Definimos la excentricidad de una cónica como el cociente de c y a:
- ☞ $\boxed{\varepsilon = \dfrac{c}{a}}$
- ☞ En una elipse se cumple: $0 < \varepsilon < 1$
- ☞ Cuanto mayor sea ε , más achatada es la elipse.

Figuras

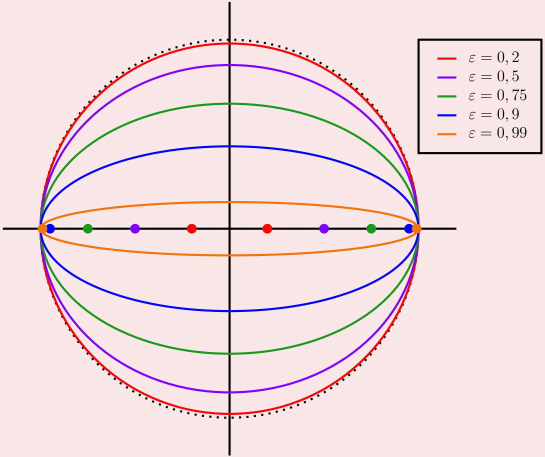


Excentricidad de una elipse

Definición de excentricidad

- ✍ Definimos la excentricidad de una cónica como el cociente de c y a:
- ☞ $\boxed{\varepsilon = \dfrac{c}{a}}$
- ☞ En una elipse se cumple: $0 < \varepsilon < 1$
- ☞ Cuanto mayor sea ε , más achatada es la elipse.

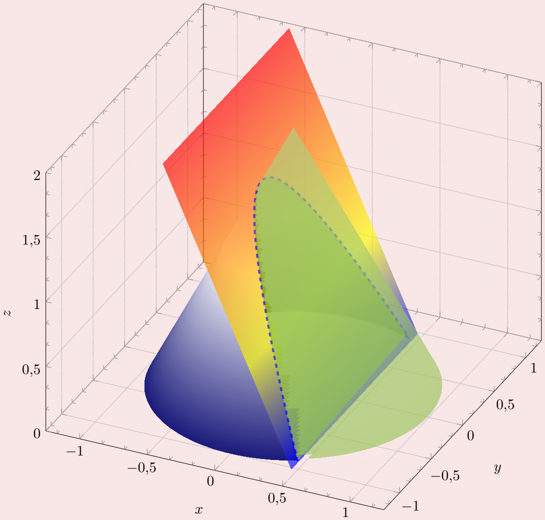
Figuras



Obtención de una hipérbola

- Corte de un cono con un plano oblicuo a la base con una inclinación mayor que la de la generatriz.

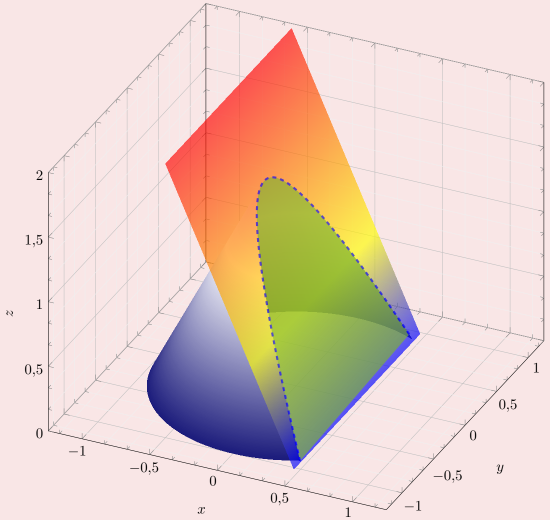
Figuras



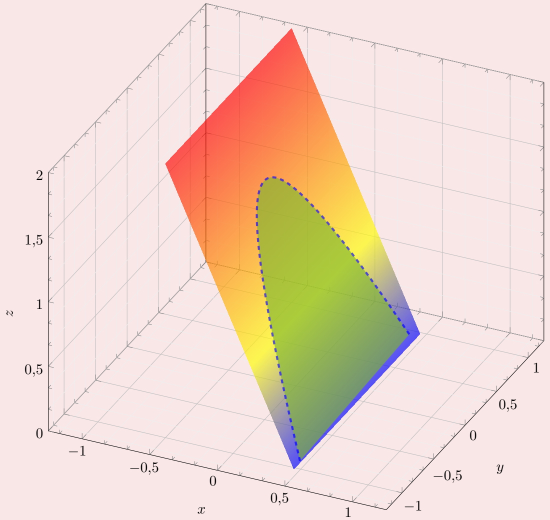
Obtención de una hipérbola

- Corte de un cono con un plano oblicuo a la base con una inclinación mayor que la de la generatriz.

Figuras



Figuras



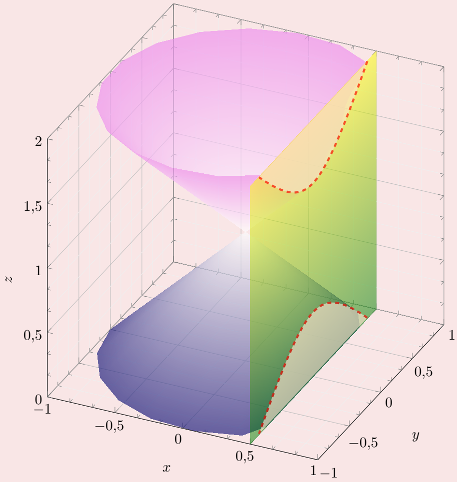
Obtención de una hipérbola

- Corte de un cono con un plano oblicuo a la base con una inclinación mayor que la de la generatriz.

Obtención de una hipérbola

- Corte de un cono con un plano oblicuo a la base con una inclinación mayor que la de la generatriz.
- Al ser un doble cono, la hipérbola tiene dos ramas.

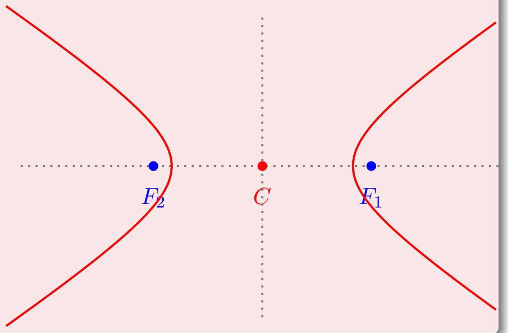
Figuras



Definición de hipérbola. ✍

☞ Conjunto de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante, igual a $2a$.

Figuras



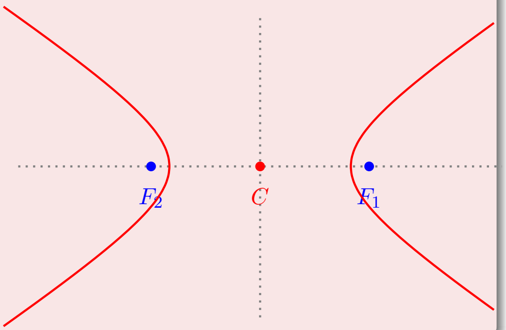
Definición de hipérbola. ✍

☞ Conjunto de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante, igual a $2a$.

Ecuación canónica de la hipérbola ✍

- Sea ϵ una hipérbola de focos F_1, F_2 y $2a$:

Figuras



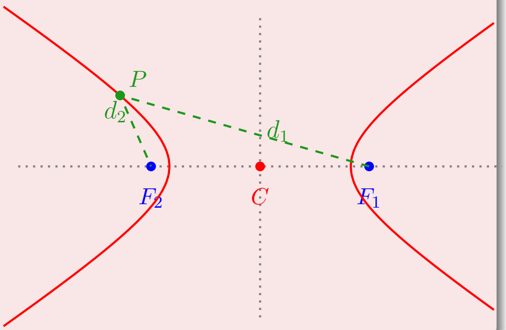
Definición de hipérbola. ✍

☞ Conjunto de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante, igual a $2a$.

Ecuación canónica de la hipérbola ✍

- Sea ϵ una hipérbola de focos F_1, F_2 y $2a$:
- Imponemos: $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a \Rightarrow$ $|\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}| = 2a$

Figuras



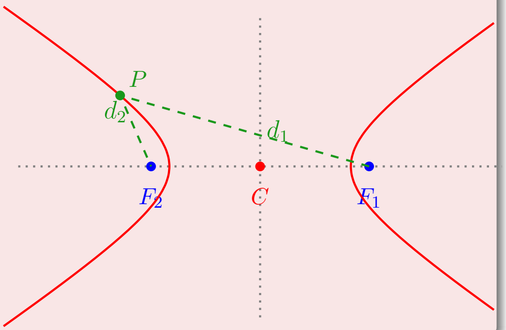
Definición de hipérbola. ✍

☞ Conjunto de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante, igual a $2a$.

Ecuación canónica de la hipérbola ✍

- Sea ϵ una hipérbola de focos F_1, F_2 y $2a$:
- Imponemos: $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a \Rightarrow$ $|\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}| = 2a$
- Elevando al cuadrado dos veces la igualdad:

Figuras



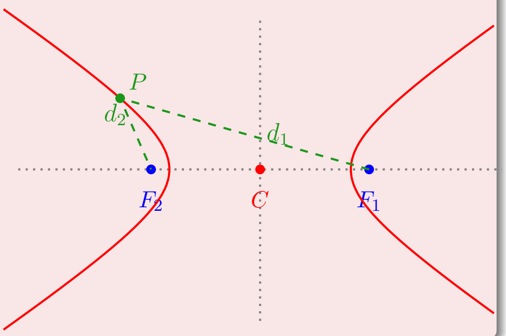
Definición de hipérbola. ✍

☞ Conjunto de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante, igual a $2a$.

Ecuación canónica de la hipérbola ✍

- Sea ϵ una hipérbola de focos F_1, F_2 y $2a$:
- Imponemos: $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a \Rightarrow$ $|\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}| = 2a$
- Elevando al cuadrado dos veces la igualdad:
- $(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2) \Rightarrow$ $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$

Figuras



Definición de hipérbola. ✍

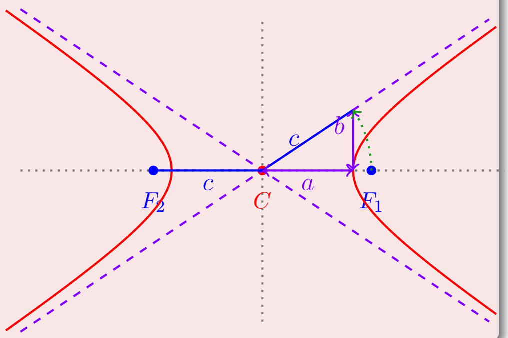
☞ Conjunto de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante, igual a $2a$.

Asíntotas de la hipérbola

- La hipérbola se aproxima asíntóticamente a las rectas:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{b}{a}x \\[2ex] y = \dfrac{b}{a}x \end{cases}$$

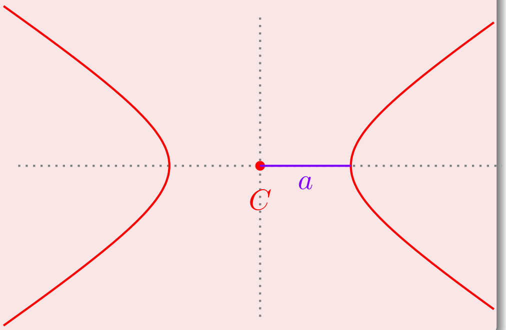
Figuras



Relación entre a, b y c

- ☞ a es el semieje mayor de la hipérbola.

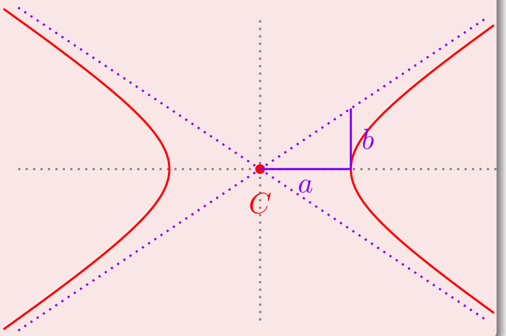
Figuras



Relación entre a, b y c

- ☞ a es el semieje mayor de la hipérbola.
- ☞ b es el semieje menor de la hipérbola.

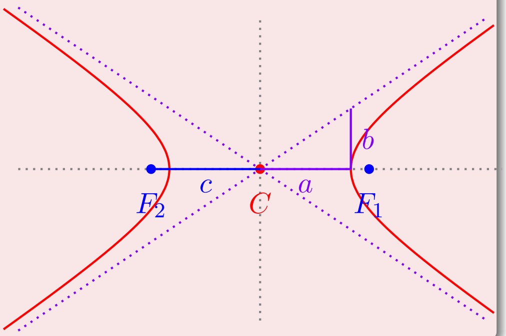
Figuras



Relación entre a, b y c

- a es el semieje mayor de la hipérbola.
- b es el semieje menor de la hipérbola.
- c es la semidistancia focal.

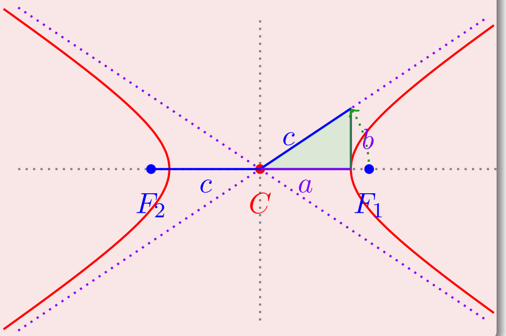
Figuras



Relación entre a, b y c

- ☞ a es el semieje mayor de la hipérbola.
- ☞ b es el semieje menor de la hipérbola.
- ☞ c es la semidistancia focal.
- ☞ $[a, b, c]$ forman una terna pitagórica:

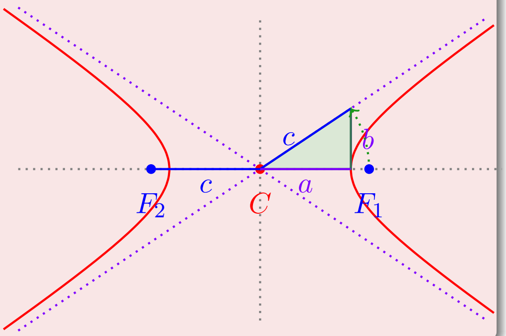
Figuras



Relación entre a, b y c

- ☞ a es el semieje mayor de la hipérbola.
- ☞ b es el semieje menor de la hipérbola.
- ☞ c es la semidistancia focal.
- ☞ $[a, b, c]$ forman una terna pitagórica:
- ✍ $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

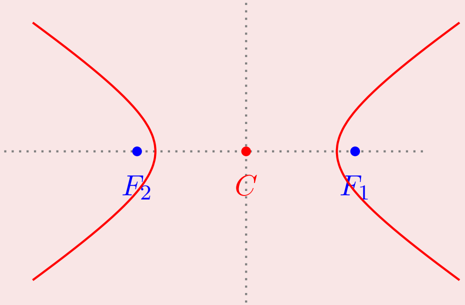
Figuras



Ecuación canónica con centro C. ✍

- Sea η una hipérbola de semiejes a y b, centro $C = (x_c, y_c)$, ejes paralelos a los ejes coordenados: $F_1 = (x_c + c, y_c)$; $F_2 = (x_c - c, y_c)$

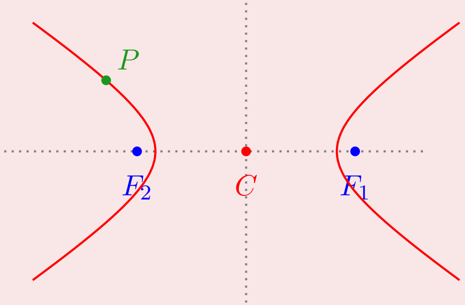
Figuras



Ecuación canónica con centro C. ✍

- Sea η una hipérbola de semiejes a y b, centro $C = (x_c, y_c)$, ejes paralelos a los ejes coordenados: $F_1 = (x_c + c, y_c)$; $F_2 = (x_c - c, y_c)$
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

Figuras

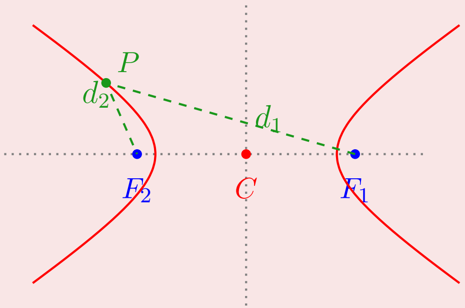


Ecuación canónica con centro C. ✍

- Sea η una hipérbola de semiejes a y b, centro $C = (x_c, y_c)$, ejes paralelos a los ejes coordenados: $F_1 = (x_c + c, y_c)$; $F_2 = (x_c - c, y_c)$
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

☞ $P \in \eta \Leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$

Figuras



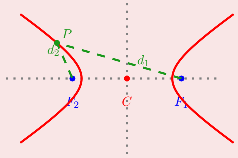
Ecuación canónica con centro C. ✍

- Sea η una hipérbola de semiejes a y b, centro $C = (x_c, y_c)$, ejes paralelos a los ejes coordenados: $F_1 = (x_c + c, y_c)$; $F_2 = (x_c - c, y_c)$
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

☞ $P \in \eta \Leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$

- Imponemos la condición anterior y elevamos al cuadrado:

Figuras



Ecuación canónica con centro C. ✍

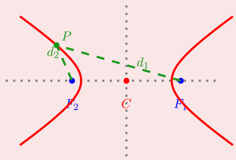
- Sea η una hipérbola de semiejes a y b, centro $C=(x_c,y_c)$, ejes paralelos a los ejes coordenados: $F_1=(x_c+c,y_c)$; $F_2=(x_c-c,y_c)$
- Sea $P=(x,y)$ un punto genérico del plano.

☞ $P\in\eta \Leftrightarrow |d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a$

- Imponemos la condición anterior y elevamos al cuadrado:

☞ $\sqrt{(x-x_c-c)^2+(y-yc)^2}-\sqrt{(x-x_c+c)^2+(y-yc)^2}=2a$

Figuras



Ecuación canónica con centro C. ✍

- Sea η una hipérbola de semiejes a y b, centro $C = (x_c, y_c)$, ejes paralelos a los ejes coordenados: $F_1 = (x_c + c, y_c)$; $F_2 = (x_c - c, y_c)$
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

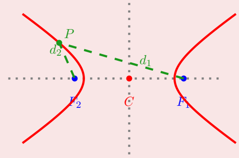
☞ $P \in \eta \Leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$

- Imponemos la condición anterior y elevamos al cuadrado:

☞ $\sqrt{(x - x_c - c)^2 + (y - yc)^2} - \sqrt{(x - x_c + c)^2 + (y - yc)^2} = 2a$

✍ $$\boxed{\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1}$$

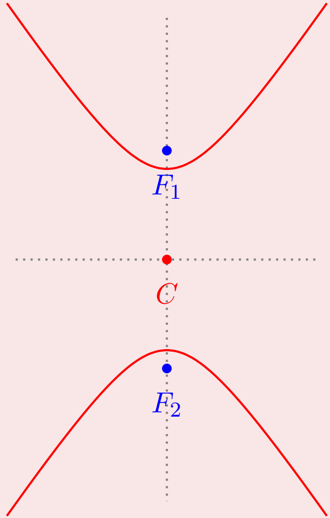
Figuras



Ecuación con los focos en el eje Y. ✍

- Sea η una hipérbola de eje mayor $2a$, eje menor $2b$ y centro O: $F_1 = (0, c)$; $F_2 = (0, -c)$.

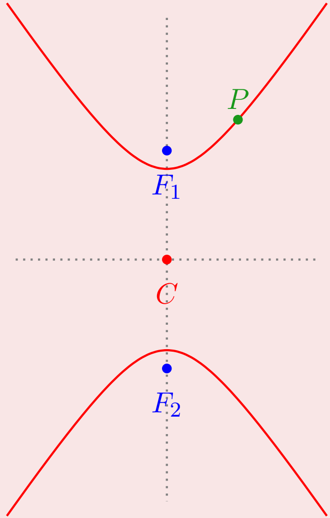
Figuras



Ecuación con los focos en el eje Y. ✍

- Sea η una hipérbola de eje mayor $2a$, eje menor $2b$ y centro O: $F_1 = (0, c); F_2 = (0, -c)$.
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

Figuras

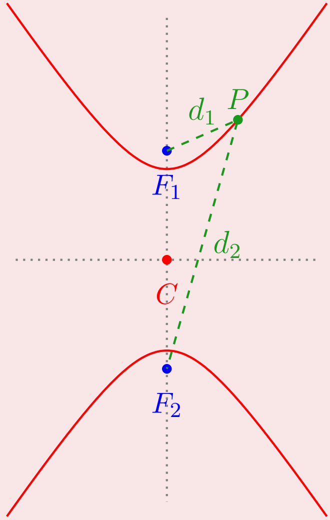


Ecuación con los focos en el eje Y. ✍

- Sea η una hipérbola de eje mayor $2a$, eje menor $2b$ y centro O: $F_1 = (0, c)$; $F_2 = (0, -c)$.
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

☞ $P \in \eta \Leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$

Figuras



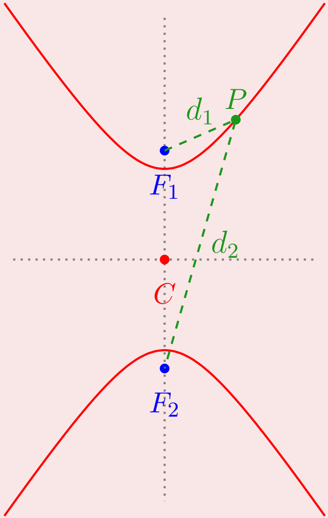
Ecuación con los focos en el eje Y. ✍

- Sea η una hipérbola de eje mayor $2a$, eje menor $2b$ y centro O: $F_1 = (0, c)$; $F_2 = (0, -c)$.
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

☞ $P \in \eta \Leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$

- Imponemos la condición anterior y elevamos al cuadrado:

Figuras



Ecuación con los focos en el eje Y. ✍

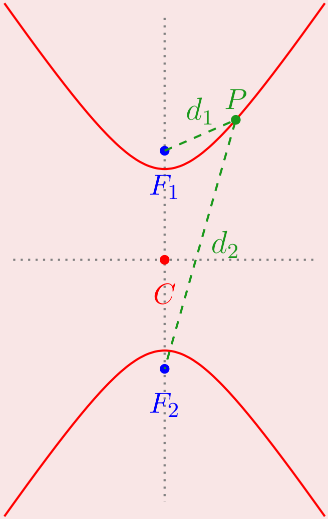
- Sea η una hipérbola de eje mayor $2a$, eje menor $2b$ y centro O: $F_1 = (0, c); F_2 = (0, -c)$.
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

☞ $P \in \eta \Leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$

- Imponemos la condición anterior y elevamos al cuadrado:

☞ $\sqrt{x^2 + (y-c)^2} - \sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a$

Figuras



Ecuación con los focos en el eje Y. ✍

- Sea η una hipérbola de eje mayor $2a$, eje menor $2b$ y centro O: $F_1 = (0, c)$; $F_2 = (0, -c)$.
- Sea $P = (x, y)$ un punto genérico del plano.

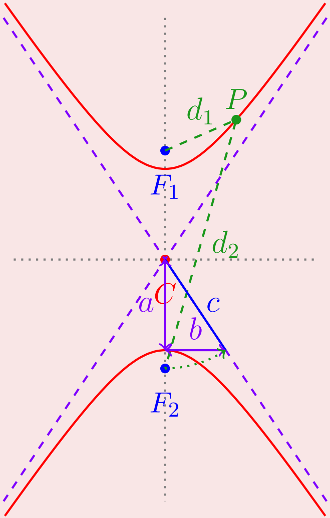
☞ $P \in \eta \Leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$

- Imponemos la condición anterior y elevamos al cuadrado:

☞ $\sqrt{x^2 + (y - c)^2} - \sqrt{x^2 + (y + c)^2} = 2a$

✍ $\boxed{\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1}$

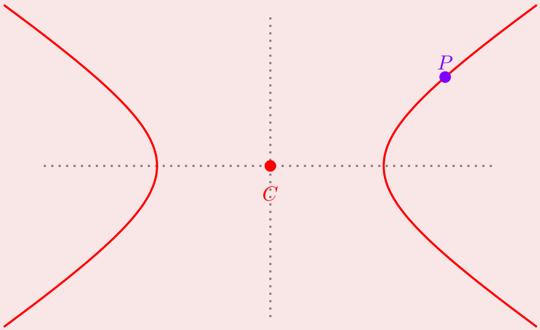
Figuras



Ecuaciones paramétricas

- Sea P un punto de la hipérbola.

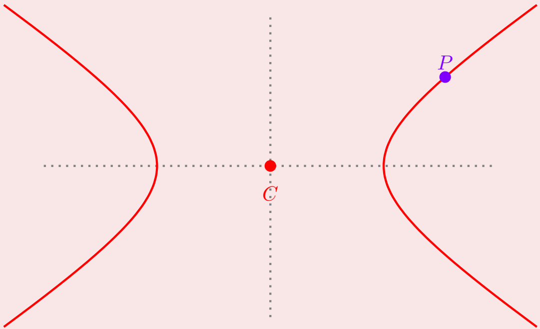
Figuras



Ecuaciones paramétricas

- Sea P un punto de la hipérbola.
- Las coordenadas de P serán, según su rama:

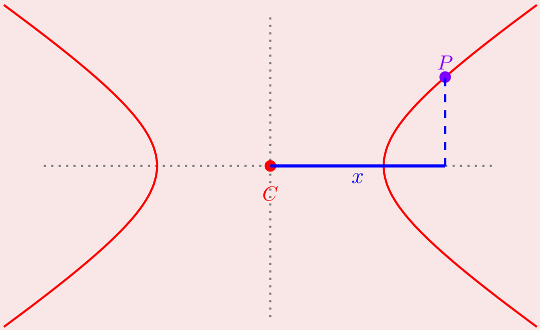
Figuras



Ecuaciones paramétricas

- Sea P un punto de la hipérbola.
- Las coordenadas de P serán, según su rama:
  - $x = \pm a \cosh \theta$

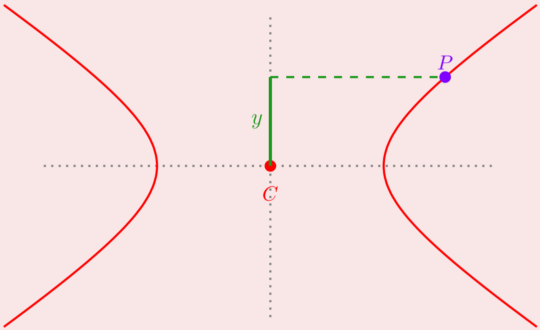
Figuras



Ecuaciones paramétricas

- Sea P un punto de la hipérbola.
- Las coordenadas de P serán, según su rama:
  - $x = \pm a \cosh \theta$
  - $y = b \operatorname{senh} \theta$

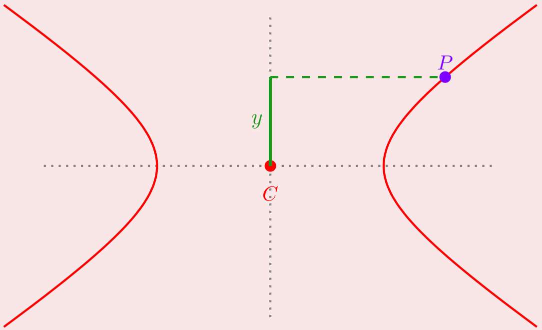
Figuras



Ecuaciones paramétricas

- Sea P un punto de la hipérbola.
- Las coordenadas de P serán, según su rama:
  - $x = \pm a \cosh \theta$
  - $y = b \,\mathrm{senh}\, \theta$
- Así, las ecuaciones paramétricas son:

Figuras

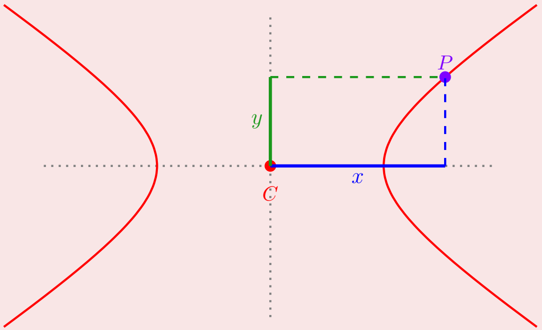


La hipérbola. Ecuaciones paramétricas

Ecuaciones paramétricas

- Sea P un punto de la hipérbola.
- Las coordenadas de P serán, según su rama:
  - $x = \pm a \cosh\theta$
  - $y = b\,\mathrm{senh}\,\theta$
- Así, las ecuaciones paramétricas son:
- $$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = \pm a\cosh\theta \\ y = b\,\mathrm{senh}\,\theta \end{array}\right. ,\forall\theta\in\mathbb{R}}$$

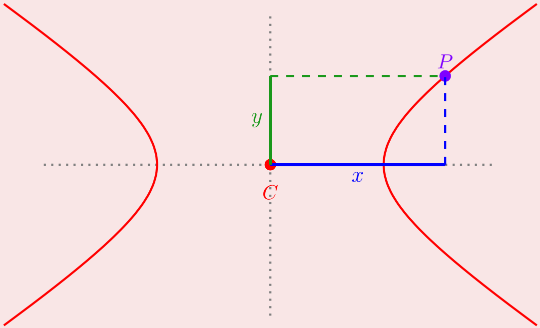
Figuras



Ecuaciones paramétricas

- Sea P un punto de la hipérbola.
- Las coordenadas de P serán, según su rama:
  - $x = \pm a \cosh\theta$
  - $y = b \operatorname{senh}\theta$
- Así, las ecuaciones paramétricas son:
- $\boxed{\begin{cases} x = \pm a \cosh\theta \\ y = b \operatorname{senh}\theta \end{cases}, \forall\theta \in \mathbb{R}}$

Figuras



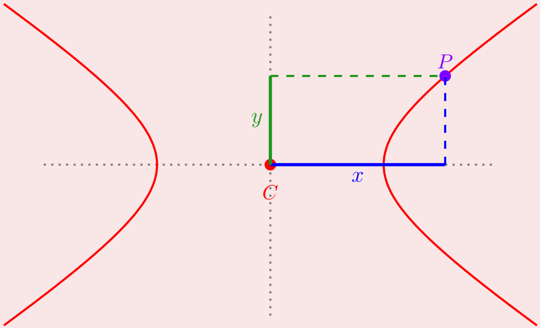
Demostración

¡Recuerda! ☞ $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}; \ \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Ecuaciones paramétricas

- Sea P un punto de la hipérbola.
- Las coordenadas de P serán, según su rama:
  - $x = \pm a \cosh\theta$
  - $y = b \operatorname{senh}\theta$
- Así, las ecuaciones paramétricas son:
- $\boxed{\begin{cases} x = \pm a\cosh\theta \\ y = b\operatorname{senh}\theta \end{cases}, \forall\theta\in\mathbb{R}}$

Figuras



Demostración

¡Recuerda! ☞ $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{\cancel{a^2}\cosh^2\theta}{\cancel{a^2}} - \dfrac{\cancel{b^2}\operatorname{senh}^2\theta}{\cancel{b^2}} = \cosh^2\theta - \operatorname{senh}^2\theta = 1, \forall\theta\in\mathbb{R}$

Excentricidad de una hipérbola

Definición de excentricidad

Recuerda: la excentricidad de una cónica es el cociente de c y a:

Excentricidad de una hipérbola

Definición de excentricidad

Recuerda: la excentricidad de una cónica es el cociente de c y a:

☞ $\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}$

Excentricidad de una hipérbola

Definición de excentricidad

Recuerda: la excentricidad de una cónica es el cociente de c y a:

- $\boxed{\varepsilon = \dfrac{c}{a}}$
- En una hipérbola se cumple: $\varepsilon > 1$

Excentricidad de una hipérbola

Definición de excentricidad

Recuerda: la excentricidad de una cónica es el cociente de c y a:

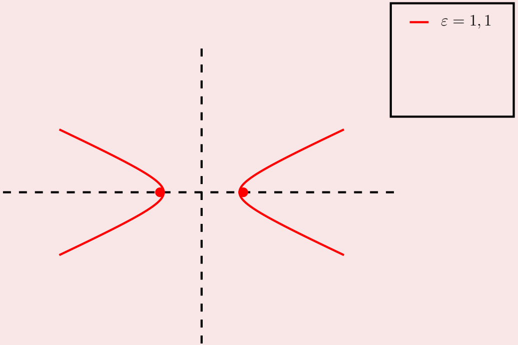
- $\boxed{\varepsilon = \dfrac{c}{a}}$
- En una hipérbola se cumple: $\varepsilon > 1$
- Cuanto menor sea ε , más achatada es la hipérbola.

Definición de excentricidad

Recuerda: la excentricidad de una cónica es el cociente de c y a:

- $\boxed{\varepsilon = \dfrac{c}{a}}$
- En una hipérbola se cumple: $\varepsilon > 1$
- Cuanto menor sea ε , más achatada es la hipérbola.

Figuras



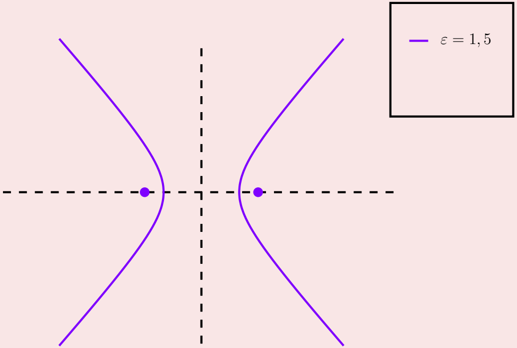
Excentricidad de una hipérbola

Definición de excentricidad

Recuerda: la excentricidad de una cónica es el cociente de c y a:

- $\boxed{\varepsilon = \dfrac{c}{a}}$
- En una hipérbola se cumple: $\varepsilon > 1$
- Cuanto menor sea ε , más achatada es la hipérbola.

Figuras



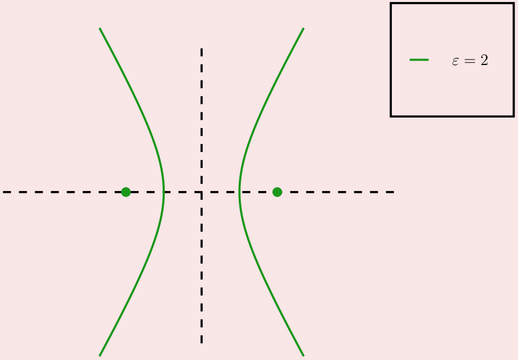
Excentricidad de una hipérbola

Definición de excentricidad

Recuerda: la excentricidad de una cónica es el cociente de c y a:

- $\boxed{\varepsilon = \dfrac{c}{a}}$
- En una hipérbola se cumple: $\varepsilon > 1$
- Cuanto menor sea ε , más achatada es la hipérbola.

Figuras



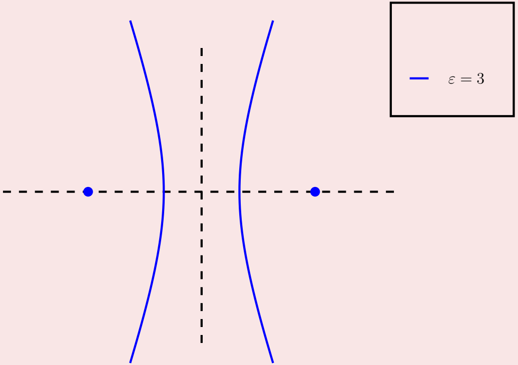
Excentricidad de una hipérbola

Definición de excentricidad

Recuerda: la excentricidad de una cónica es el cociente de c y a:

- $\boxed{\varepsilon = \dfrac{c}{a}}$
- En una hipérbola se cumple: $\varepsilon > 1$
- Cuanto menor sea ε , más achatada es la hipérbola.

Figuras



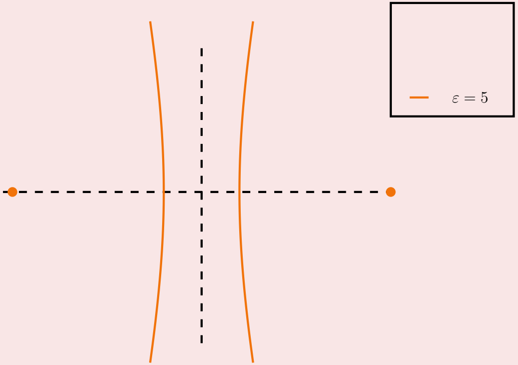
Excentricidad de una hipérbola

Definición de excentricidad

Recuerda: la excentricidad de una cónica es el cociente de c y a:

- $\boxed{\varepsilon = \dfrac{c}{a}}$
- En una hipérbola se cumple: $\varepsilon > 1$
- Cuanto menor sea ε , más achatada es la hipérbola.

Figuras



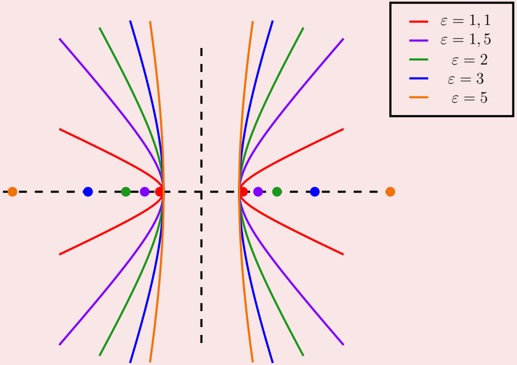
Excentricidad de una hipérbola

Definición de excentricidad

Recuerda: la excentricidad de una cónica es el cociente de c y a:

- $\boxed{\varepsilon = \dfrac{c}{a}}$
- En una hipérbola se cumple: $\varepsilon > 1$
- Cuanto menor sea ε , más achatada es la hipérbola.

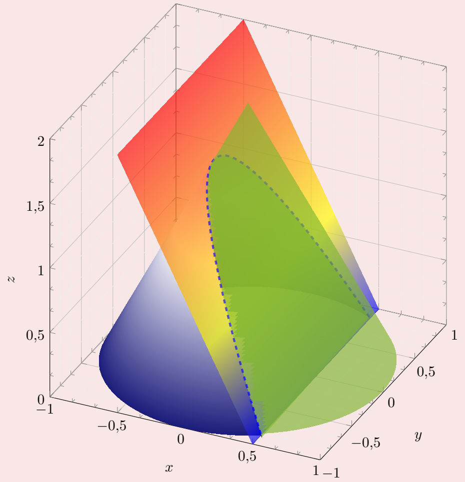
Figuras



Obtención de una parábola

- Corte de un cono con un plano oblicuo a la base paralelo a la generatriz.

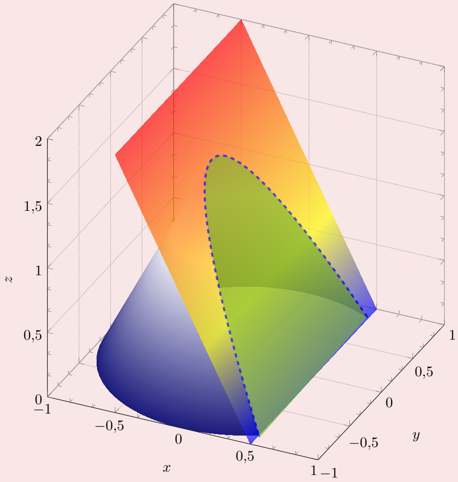
Figuras



Obtención de una parábola

- Corte de un cono con un plano oblicuo a la base paralelo a la generatriz.

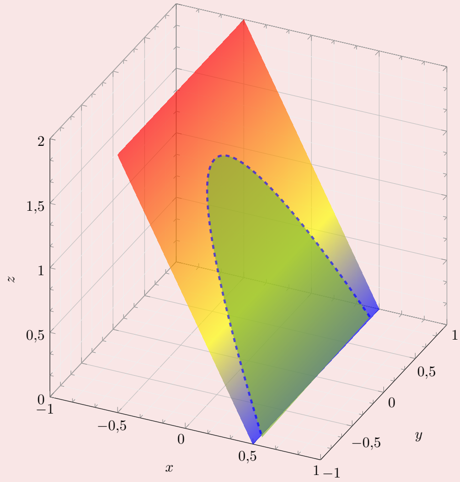
Figuras



Obtención de una parábola

- Corte de un cono con un plano oblicuo a la base paralelo a la generatriz.

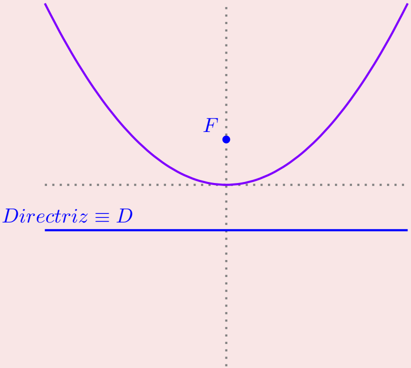
Figuras



Definición de parábola. ✍

- ☞ Conjunto de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta llamada directriz.

Figuras



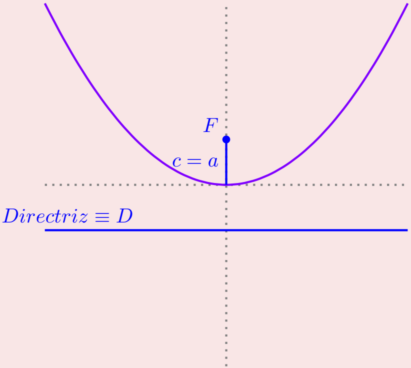
Definición de parábola. ✍

☞ Conjunto de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta llamada directriz.

Ecuación canónica de la parábola ✍

- Sea ρ una parábola cóncava vista desde arriba de foco $F = (0, p)$ y recta directriz $y = -p$

Figuras



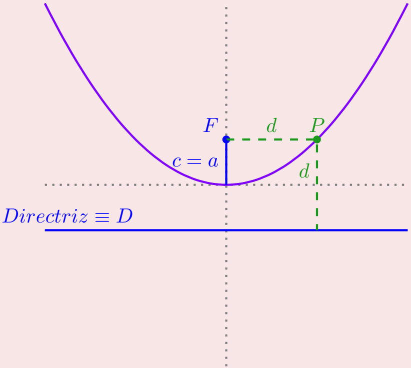
Definición de parábola. ✍

☞ Conjunto de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta llamada directriz.

Ecuación canónica de la parábola ✍

- Sea ρ una parábola cóncava vista desde arriba de foco $F = (0, p)$ y recta directriz $y = -p$
- Imponemos: $d(P, F) = d(P, D) \Rightarrow$ $\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = (y+p)^2$

Figuras



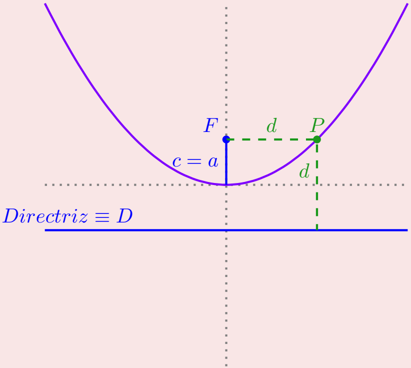
Definición de parábola. ✍

☞ Conjunto de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta llamada directriz.

Ecuación canónica de la parábola ✍

- Sea ρ una parábola cóncava vista desde arriba de foco $F = (0, p)$ y recta directriz $y = -p$
- Imponemos: $d(P, F) = d(P, D) \Rightarrow$ $\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = (y+p)^2$
- Elevando al cuadrado y agrupando obtenemos:

Figuras



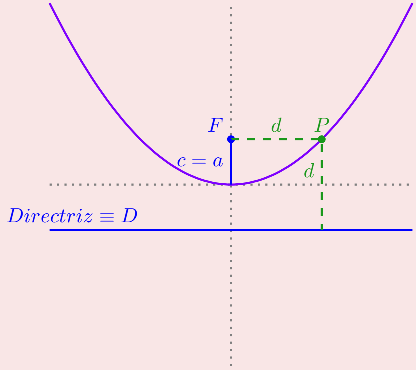
Definición de parábola. ✍

☞ Conjunto de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta llamada directriz.

Ecuación canónica de la parábola ✍

- Sea ρ una parábola cóncava vista desde arriba de foco $F=(0,p)$ y recta directriz $y=-p$
- Imponemos: $d(P,F)=d(P,D) \Rightarrow$ $\sqrt{x^2+(y-p)^2}=(y+p)^2$
- Elevando al cuadrado y agrupando obtenemos:
- $\boxed{x^2=4p\cdot y \Rightarrow y=\dfrac{x^2}{4p}}$

Figuras



Definición de parábola. ✍

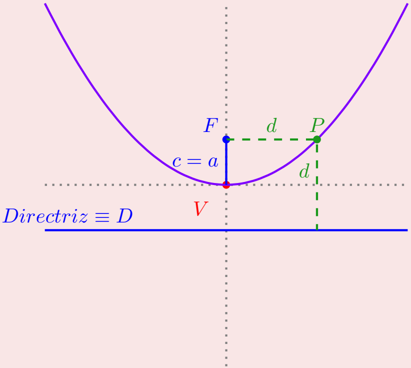
☞ Conjunto de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta llamada directriz.

Ecuación canónica de la parábola ✍

- Sea ρ una parábola cóncava vista desde arriba de foco $F = (0, p)$ y recta directriz $y = -p$
- Imponemos: $d(P, F) = d(P, D) \Rightarrow$ $\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = (y+p)^2$
- Elevando al cuadrado y agrupando obtenemos:
- $\boxed{x^2 = 4p \cdot y \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{4p}}$

☞ El vértice es el punto más próximo a F

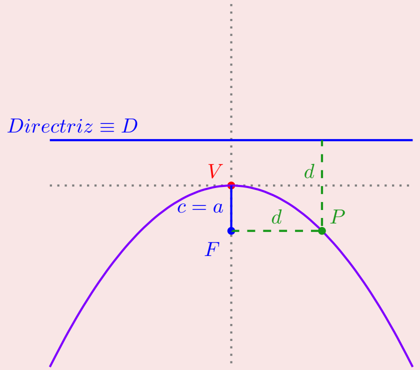
Figuras



Ecuación canónica de la parábola ✍

- Si la parábola es convexa vista desde arriba, podemos deducir fácilmente la ecuación:

Figuras



Ecuación canónica de la parábola ✍

- Si la parábola es convexa vista desde arriba, podemos deducir fácilmente la ecuación:
- $\boxed{y = -\frac{x^2}{4p}}$

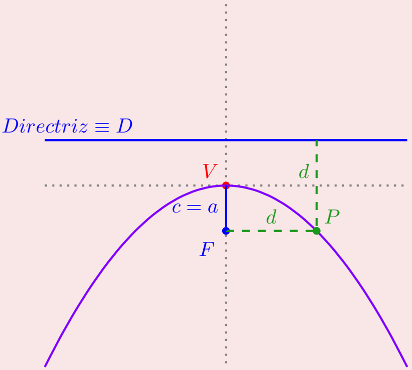
Elementos de la parábola

☞ $F = (0, -p)$

☞ $D \equiv y = p$

☞ $V = (0, 0)$

Figuras



El coeficiente a

☞ A partir de la ecuación $y = \dfrac{x^2}{4p}$, definimos:

El coeficiente a

- ☞ A partir de la ecuación $y = \dfrac{x^2}{4p}$, definimos:
- ☞ $a = \dfrac{1}{4p}$ (Este coeficiente a NO es el semieje mayor de la parábola.)

El coeficiente a

- ☞ A partir de la ecuación $y = \dfrac{x^2}{4p}$, definimos:
- ☞ $a = \dfrac{1}{4p}$ (Este coeficiente a NO es el semieje mayor de la parábola.)
- ☞ Así, la ecuación de la parábola con vértice en el $(0, 0)$ será:

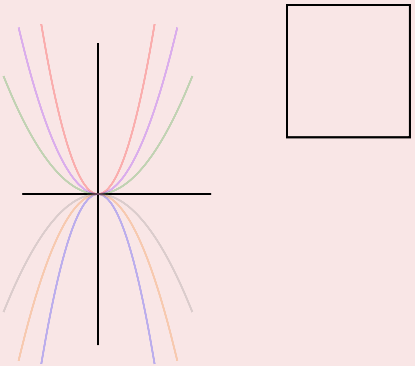
El coeficiente a

- ☞ A partir de la ecuación $y = \dfrac{x^2}{4p}$, definimos:
- ☞ $a = \dfrac{1}{4p}$ (Este coeficiente a NO es el semieje mayor de la parábola.)
- ☞ Así, la ecuación de la parábola con vértice en el $(0, 0)$ será:
- ✍ $\boxed{y = ax^2}$

Forma de la parábola $y = ax^2$

- La forma de la parábola depende de a:

Figuras

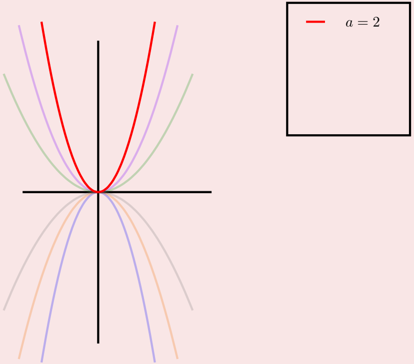


Forma de la parábola $y = ax^2$

- La forma de la parábola depende de a:

☞ $a = 2$

Figuras

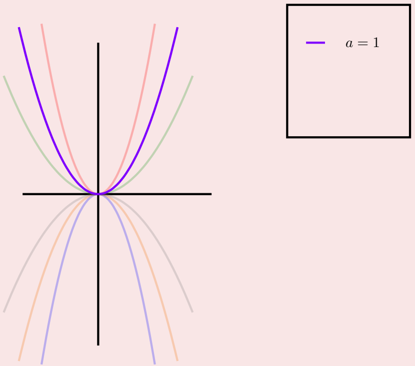


Forma de la parábola $y = ax^2$

- La forma de la parábola depende de a:

☞ $a = 1$

Figuras

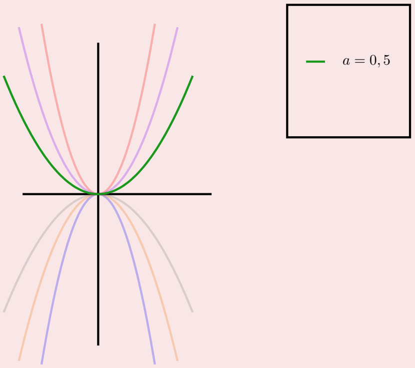


Forma de la parábola $y = ax^2$

- La forma de la parábola depende de a:

☞ $a = 0,5$

Figuras

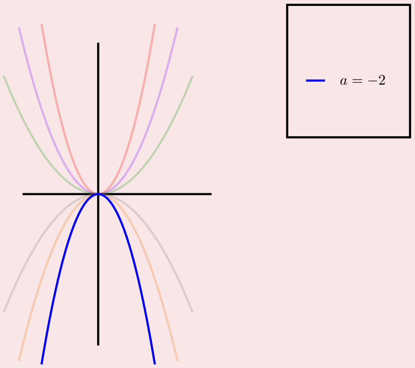


Forma de la parábola $y = ax^2$

- La forma de la parábola depende de a:

☞ $a = -2$

Figuras

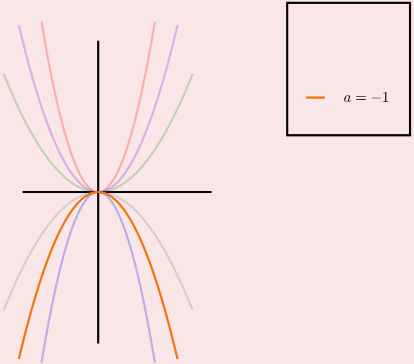


Forma de la parábola $y = ax^2$

- La forma de la parábola depende de a:

☞ $a = -1$

Figuras

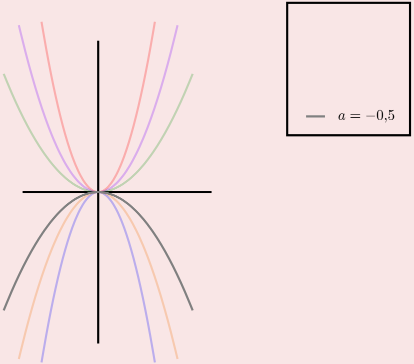


Forma de la parábola $y = ax^2$

- La forma de la parábola depende de a:

☞ $a = -0,5$

Figuras



Forma de la parábola $y = ax^2$

- La forma de la parábola depende de a:

☞ $a = 2$

☞ $a = 1$

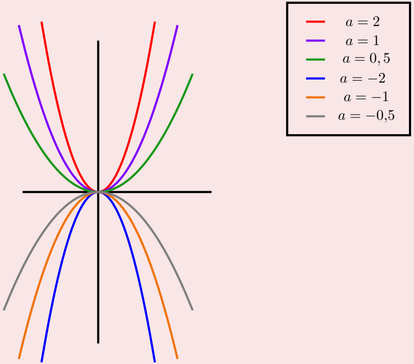
☞ $a = 0,5$

☞ $a = -2$

☞ $a = -1$

☞ $a = -0,5$

Figuras



Conclusiones

Ecuaciones de la parábola

Relación entre el coeficiente a y la apertura de la parábola

Forma de la parábola $y = ax^2$

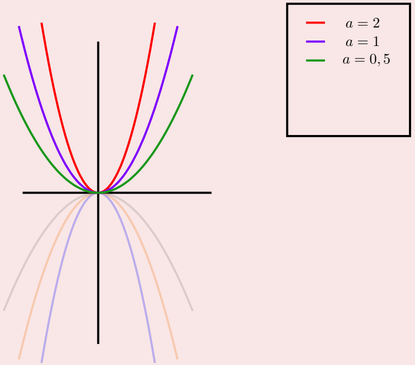
- La forma de la parábola depende de a:

☞ $a = 2$

☞ $a = 1$

☞ $a = 0,5$

Figuras



Conclusiones

☞ Si $a > 0 \Rightarrow$ cóncava[a]

[a] Vista desde arriba

Forma de la parábola $y = ax^2$

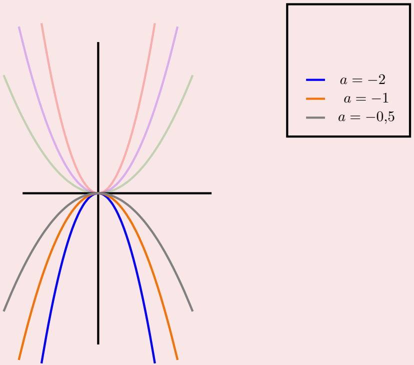
- La forma de la parábola depende de a:

☞ $a = -2$

☞ $a = -1$

☞ $a = -0,5$

Figuras



Conclusiones

☞ Si $a < 0 \Rightarrow$ convexa

Ecuaciones de la parábola

Relación entre el coeficiente a y la apertura de la parábola

Forma de la parábola $y = ax^2$

- La forma de la parábola depende de a:

☞ $a = 2$

☞ $a = 1$

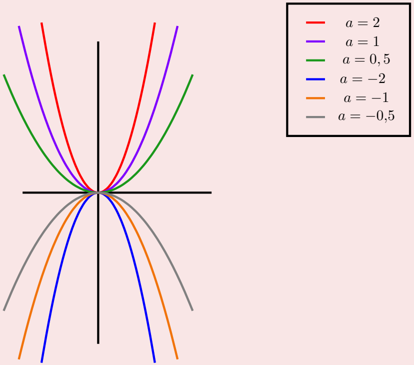
☞ $a = 0,5$

☞ $a = -2$

☞ $a = -1$

☞ $a = -0,5$

Figuras



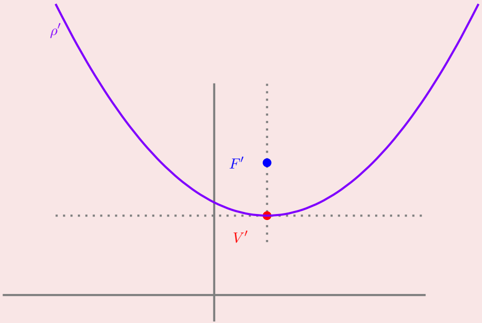
Conclusiones

☞ Si $|a|$ aumenta $\Rightarrow$ se acerca al eje OY

Traslación de una parábola

- Sea una parábola ρ' con vértice $V' = (x_v, y_v)$

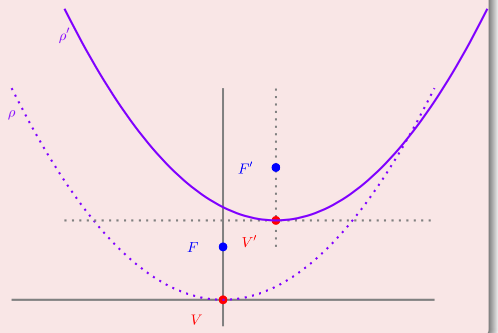
Figuras



Traslación de una parábola

- Sea una parábola ρ' con vértice $V' = (x_v, y_v)$
- Podemos obtener su ecuación a partir de la canónica de ρ con vértice en $V = (0,0)$

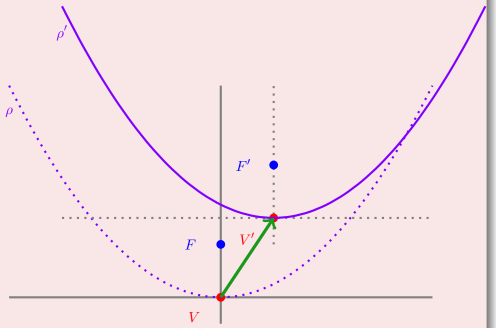
Figuras



Traslación de una parábola

- Sea una parábola ρ' con vértice $V' = (x_v, y_v)$
- Podemos obtener su ecuación a partir de la canónica de ρ con vértice en $V = (0, 0)$
- $\rho \equiv y = \dfrac{x^2}{4p} \Rightarrow \rho' \equiv y - y_v = \dfrac{(x - x_v)^2}{4p}$

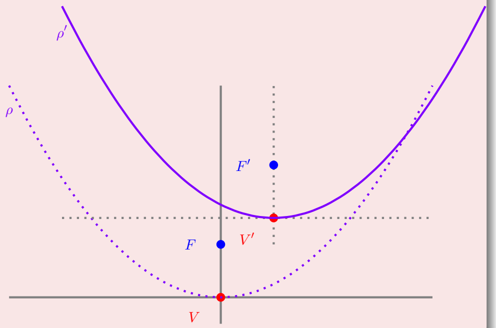
Figuras



Traslación de una parábola

- Sea una parábola ρ' con vértice $V' = (x_v, y_v)$
- Podemos obtener su ecuación a partir de la canónica de ρ con vértice en $V = (0,0)$
- $\rho \equiv y = \dfrac{x^2}{4p} \Rightarrow \rho' \equiv y - y_v = \dfrac{(x - x_v)^2}{4p}$
- En forma general: $\boxed{y - y_v = a(x - x_v)^2}$

Figuras



Ecuación general de la parábola.

- Sea una parábola de parámetro $a = \dfrac{1}{4p}$ y vértice $V = (x_v, y_v)$

Ecuación general de la parábola.

- Sea una parábola de parámetro $a = \dfrac{1}{4p}$ y vértice $V = (x_v, y_v)$
- Su ecuación ordinaria es: $4p(y - y_v) = (x - x_v)^2$

Ecuación general de la parábola.

- Sea una parábola de parámetro $a = \dfrac{1}{4p}$ y vértice $V = (x_v, y_v)$
- Su ecuación ordinaria es: $4p(y - y_v) = (x - x_v)^2$
- Sustituimos $a = \dfrac{1}{4p} \Rightarrow y - y_v = a(x - x_v)^2$

Ecuación general de la parábola.

- Sea una parábola de parámetro $a = \dfrac{1}{4p}$ y vértice $V = (x_v, y_v)$
- Su ecuación ordinaria es: $4p(y - y_v) = (x - x_v)^2$
- Sustituimos $a = \dfrac{1}{4p} \Rightarrow y - y_v = a(x - x_v)^2$
- Desarrollando la expresión anterior obtenemos:

Ecuación general de la parábola.

- Sea una parábola de parámetro $a = \dfrac{1}{4p}$ y vértice $V = (x_v, y_v)$
- Su ecuación ordinaria es: $4p(y - y_v) = (x - x_v)^2$
- Sustituimos $a = \dfrac{1}{4p} \Rightarrow y - y_v = a(x - x_v)^2$
- Desarrollando la expresión anterior obtenemos:
- $y = ax^2 {\color{red}-2ax_v}x + {\color{blue}ax_v^2 + y_v}$

Ecuación general de la parábola.

- Sea una parábola de parámetro $a = \dfrac{1}{4p}$ y vértice $V = (x_v, y_v)$
- Su ecuación ordinaria es: $4p(y - y_v) = (x - x_v)^2$
- Sustituimos $a = \dfrac{1}{4p} \Rightarrow y - y_v = a(x - x_v)^2$
- Desarrollando la expresión anterior obtenemos:
- $y = ax^2 - 2ax_v x + ax_v^2 + y_v$
- Obteniendo así la ecuación general tras definir b y c:
- $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$

Definición de los coeficientes b y c

☞ $b = -2ax_v$

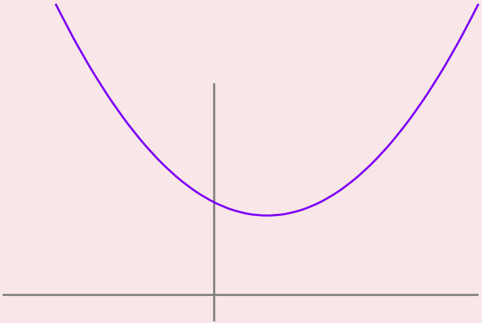
☞ $c = ax_v^2 + y_v$

Obtención de los elementos de una parábola a partir de la ecuación general

Elementos de una parábola

- Sea la parábola $y(x) = ax^2 + bx + c$

Figuras

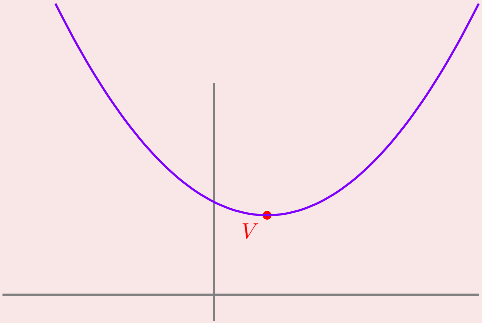


Obtención de los elementos de una parábola a partir de la ecuación general

Elementos de una parábola

- Sea la parábola $y(x) = ax^2 + bx + c$
- Obtenemos x_v e y_v:

Figuras

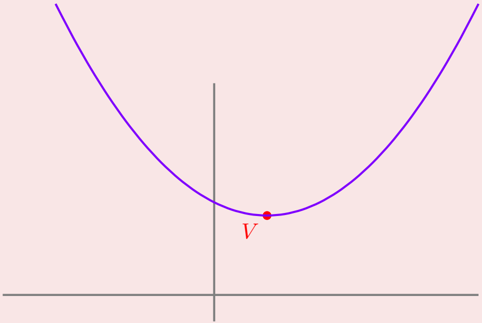


Obtención de los elementos de una parábola a partir de la ecuación general

Elementos de una parábola

- Sea la parábola $y(x) = ax^2 + bx + c$
- Obtenemos x_v e y_v:
  - ☞ $x_v = -\dfrac{b}{2a}$

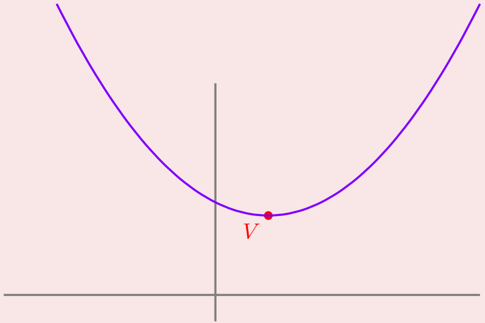
Figuras



Elementos de una parábola

- Sea la parábola $y(x) = ax^2 + bx + c$
- Obtenemos x_v e y_v:
  - ☞ $x_v = -\dfrac{b}{2a}$
  - ☞ $y(x_v) = c - ax_v^2$

Figuras

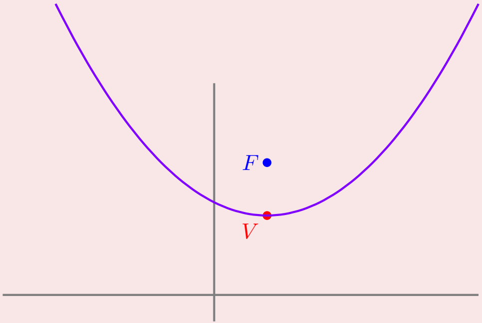


Obtención de los elementos de una parábola a partir de la ecuación general

Elementos de una parábola

- Sea la parábola $y(x) = ax^2 + bx + c$
- Obtenemos x_v e y_v:
  - ☞ $x_v = -\dfrac{b}{2a}$
  - ☞ $y(x_v) = c - ax_v^2$
- Obtenemos el foco F:

Figuras

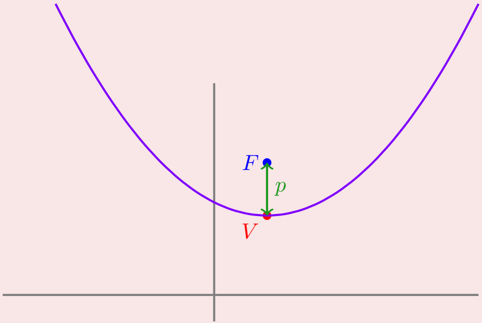


Obtención de los elementos de una parábola a partir de la ecuación general

Elementos de una parábola

- Sea la parábola $y(x) = ax^2 + bx + c$
- Obtenemos x_v e y_v:
  - ☞ $x_v = -\dfrac{b}{2a}$
  - ☞ $y(x_v) = c - ax_v^2$
- Obtenemos el foco F:
  - ☞ $F = V + (0, p) = (x_v, y_v) + \left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$

Figuras

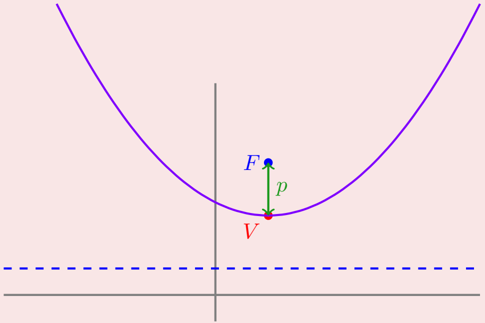


Obtención de los elementos de una parábola a partir de la ecuación general

Elementos de una parábola

- Sea la parábola $y(x) = ax^2 + bx + c$
- Obtenemos x_v e y_v:
  - ☞ $x_v = -\dfrac{b}{2a}$
  - ☞ $y(x_v) = c - ax_v^2$
- Obtenemos el foco F:
  - ☞ $F = V + (0, p) = (x_v, y_v) + \left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$
- Obtenemos la directriz:

Figuras



Elementos de una parábola

- Sea la parábola $y(x) = ax^2 + bx + c$
- Obtenemos x_v e y_v:
  - ☞ $x_v = -\dfrac{b}{2a}$
  - ☞ $y(x_v) = c - ax_v^2$
- Obtenemos el foco F:
  - ☞ $F = V + (0, p) = (x_v, y_v) + \left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$
- Obtenemos la directriz:
  - ☞ $y = y_v - p = c - ax_v^2 - \dfrac{1}{4a}$

Figuras