CONCURSO DE PRIMAVERA 2015

NIVEL 4

FASE 2

EJERCICIO 16

Pelayo Palacio Pérez

EJERCICIO 1

16 La suma de la progresión geométrica decreciente ilimitada a, ar, ar^2,… es 7 y la suma de la progresión obtenida considerando solamente los términos con exponente impar de r, es 3. ¿Cuál es el valor de $a + r$?

A) $\frac{4}{3}$ **B)** $\frac{12}{7}$ **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** $\frac{7}{3}$ **E)** $\frac{5}{2}$

Ideas y técnicas para progresiones

TÉCNICAS	IDEAS				
	Método directo	Reconocimiento patrones	Progresiones aritméticas	Progresiones geométricas	Conexiones Otras Áreas
Álgebra					
Definiciones					
Progresión aritmética: definición, suma					
Progresión geométrica: definición, suma					
Progresiones recurrentes					
Cálculo de límites					

Solución al ejercicio

La definición de progresión geométrica nos dice que dados $a, r \in \mathbb{R}$: $a_1 = a$; $a_2 = a_1 \cdot r$; $a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$;...; $a_{n+1} = a_n \cdot r = a_1 \cdot r^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Solución al ejercicio

La definición de progresión geométrica nos dice que dados $a, r \in \mathbb{R}$: $a_1 = a$; $a_2 = a_1 \cdot r$; $a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$;...; $a_{n+1} = a_n \cdot r = a_1 \cdot r^n, \forall n \in \mathbb{N}$
Si $|r| < 1$, la suma infinita de los términos de la progresión viene dada por la siguiente fórmula: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{a}{1-r}$

Solución al ejercicio

La definición de progresión geométrica nos dice que dados $a, r \in \mathbb{R}$: $a_1 = a$; $a_2 = a_1 \cdot r$; $a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$;...; $a_{n+1} = a_n \cdot r = a_1 \cdot r^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Si $|r| < 1$, la suma infinita de los términos de la progresión viene dada por la siguiente fórmula: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{a}{1-r}$

Veamos cuánto vale la suma de los exponentes impares:

Solución al ejercicio

La definición de progresión geométrica nos dice que dados $a, r \in \mathbb{R}$: $a_1 = a$; $a_2 = a_1 \cdot r$; $a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$;...; $a_{n+1} = a_n \cdot r = a_1 \cdot r^n, \forall n \in \mathbb{N}$
Si $|r| < 1$, la suma infinita de los términos de la progresión viene dada por la siguiente fórmula: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{a}{1-r}$
Veamos cuánto vale la suma de los exponentes impares:

Si tomamos los exponentes impares:
$a_2 + a_4 + a_6 + \ldots = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^3 + a_1 \cdot r^5 + \ldots = r(a_1 + a_1 \cdot r^2 + \ldots) =$
$= \{ \text{Si } r^2 = R\} = r(a_1 + a_1 \cdot R + a_1 \cdot R^2 + \ldots)$

Solución al ejercicio

La definición de progresión geométrica nos dice que dados $a, r \in \mathbb{R}$: $a_1 = a$; $a_2 = a_1 \cdot r$; $a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$;...; $a_{n+1} = a_n \cdot r = a_1 \cdot r^n, \forall n \in \mathbb{N}$
Si $|r| < 1$, la suma infinita de los términos de la progresión viene dada por la siguiente fórmula: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{a}{1-r}$
Veamos cuánto vale la suma de los exponentes impares:

Si tomamos los exponentes impares:
$a_2 + a_4 + a_6 + \ldots = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^3 + a_1 \cdot r^5 + \ldots = r(a_1 + a_1 \cdot r^2 + \ldots) =$
$= \{ \text{ Si } r^2 = R\} = r(a_1 + a_1 \cdot R + a_1 \cdot R^2 + \ldots)$

Tenemos una progresión geométrica de razón $R = r^2$ (si $|r| < 1$ entonces $r^2 < 1$ también) y su suma viene dada por: $\dfrac{a_1}{1-R}$.

Solución al ejercicio

La definición de progresión geométrica nos dice que dados $a, r \in \mathbb{R}$: $a_1 = a$; $a_2 = a_1 \cdot r$; $a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$;...; $a_{n+1} = a_n \cdot r = a_1 \cdot r^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Si $|r| < 1$, la suma infinita de los términos de la progresión viene dada por la siguiente fórmula: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{a}{1-r}$

Veamos cuánto vale la suma de los exponentes impares:

> Si tomamos los exponentes impares:
> $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^3 + a_1 \cdot r^5 + \ldots = r(a_1 + a_1 \cdot r^2 + \ldots) =$
> $= \{ \text{ Si } r^2 = R\} = r(a_1 + a_1 \cdot R + a_1 \cdot R^2 + \ldots)$
>
> Tenemos una progresión geométrica de razón $R = r^2$ (si $|r| < 1$ entonces $r^2 < 1$ también) y su suma viene dada por: $\dfrac{a_1}{1-R}$.
>
> En nuestro caso: $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots = r \cdot \dfrac{a_1}{1-R} = \dfrac{a_1 \cdot r}{1-r^2}$

Solución al ejercicio

Respondemos a la pregunta:

El enunciado fuerza a que: $\dfrac{a_1}{1-r} = 7$ y que $\dfrac{a_1 \cdot r}{1-r^2} = 3$

Solución al ejercicio

Respondemos a la pregunta:

El enunciado fuerza a que: $\dfrac{a_1}{1-r} = 7$ y que $\dfrac{a_1 \cdot r}{1-r^2} = 3$

$$3 = \frac{a_1}{1-r^2} = \frac{a_1}{1-r} \cdot \frac{r}{1+r} = 7 \cdot \frac{r}{1+r} \Longrightarrow r = \frac{3}{4}$$

Solución al ejercicio

Respondemos a la pregunta:

El enunciado fuerza a que: $\dfrac{a_1}{1-r} = 7$ y que $\dfrac{a_1 \cdot r}{1-r^2} = 3$

$$3 = \frac{a_1}{1-r^2} = \frac{a_1}{1-r} \cdot \frac{r}{1+r} = 7 \cdot \frac{r}{1+r} \Longrightarrow r = \frac{3}{4}$$

De la condición $\dfrac{a_1}{1-r} = 7$ obtenemos que $a_1 = \dfrac{7}{4}$

Solución al ejercicio

Respondemos a la pregunta:

El enunciado fuerza a que: $\dfrac{a_1}{1-r} = 7$ y que $\dfrac{a_1 \cdot r}{1-r^2} = 3$

$$3 = \frac{a_1}{1-r^2} = \frac{a_1}{1-r} \cdot \frac{r}{1+r} = 7 \cdot \frac{r}{1+r} \Longrightarrow r = \frac{3}{4}$$

De la condición $\dfrac{a_1}{1-r} = 7$ obtenemos que $a_1 = \dfrac{7}{4}$

Sumando ambas: $a + r = \dfrac{5}{2}$

Solución al ejercicio

Respondemos a la pregunta:

El enunciado fuerza a que: $\dfrac{a_1}{1-r} = 7$ y que $\dfrac{a_1 \cdot r}{1-r^2} = 3$

$$3 = \frac{a_1}{1-r^2} = \frac{a_1}{1-r} \cdot \frac{r}{1+r} = 7 \cdot \frac{r}{1+r} \Longrightarrow r = \frac{3}{4}$$

De la condición $\dfrac{a_1}{1-r} = 7$ obtenemos que $a_1 = \dfrac{7}{4}$

Sumando ambas: $a + r = \dfrac{5}{2}$

Así pues, la solución es la **(E)**