CONSOLIDACIÓN

Ficha: Ecuaciones de la recta

1. a) $x+y-1=0$

Para hallar dos puntos de la recta, fijamos un valor de x, y despejamos el valor de y:

$x=0 \Rightarrow 0+y-1=0 \Rightarrow y=1$ El punto es $A(0,1)$

$x=1 \Rightarrow 1+y-1=0 \Rightarrow y=0$ El punto es $B(1,0)$

Un vector director es $\vec{u}=AB=(1,-1)$

b) $3y=6x+2$

$x=0 \Rightarrow 3y=2 \Rightarrow y=\frac{2}{3}$ El punto es $A\left(0,\frac{2}{3}\right)$.

$x=-1 \Rightarrow 3y=-4 \Rightarrow y=\frac{-4}{3}$ El punto es $B\left(-1,\frac{-4}{3}\right)$.

El vector director es $\vec{u}=AB=\left(-1,\frac{-4-2}{3}\right)=(-1,-2)$.

c) $\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-3}$

$x=2 \Rightarrow 0=\frac{y+1}{-3} \Rightarrow y=-1$ El punto es $A(2,\ -1)$.

$x=6 \Rightarrow \frac{6-2}{4}=\frac{y+1}{-3} \Rightarrow y=-4$ El punto es $B(6,\ -4)$.

El vector director es $\vec{u}=AB=(4,-3)$.

d) $\begin{cases} x=-3+t \\ y=-4t \end{cases}$

Para $t=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$ El punto es $A(-3,\ 0)$.

Para $t=1 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases} \Rightarrow$ El punto es $B(-2,\ -4)$.

El vector director es $\vec{u}=AB=(1,\ -4)$.

2. a) $y-10=5\cdot(x+1)$

La ecuación de la recta está en la forma punto-pendiente, por lo que la pendiente es 5.

Transformando la ecuación de la recta a la forma general hallamos fácilmente el vector normal:

$y-10-5x-5=0 \Rightarrow -5x+y-15=0 \Rightarrow$ El vector normal es $\vec{n}=(-5,\ 1)$.

b) $-2x+6y-3=0$

El vector normal es $\vec{n}=(-2,\ 6)$

Para hallar la pendiente conviene transformar la recta la forma explícita despejando y:

$6y=2x-3 \Rightarrow y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{2} \Rightarrow$ La pendiente es $\frac{1}{3}$.

c) $x=\frac{y-4}{2}$

Transformamos a la forma explícita y a la forma general:

$y=2x+4 \Rightarrow$ La pendiente es 2.

$2x-y+4=0 \Rightarrow$ El vector normal es $\vec{n}=(2,-1)$.

d) $y=3x$

La pendiente es 3.

$y=3x \Rightarrow -3x+y=0 \Rightarrow$ El vector normal es $\vec{n}=(-3,\ 1)$.

3. **a)** $r:\begin{cases}x=-1+2t\\y=1+3t\end{cases}$

b) El vector director es $\vec{u}=\left(-7,\ \dfrac{1}{2}\right)$.

La ecuación de la recta es: $\dfrac{x-5}{-7}=\dfrac{y}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\dfrac{x-5}{-7}=2y$.

c) $y+1=-6(x-4)$

d) Como la recta que buscamos es paralela a la recta r, su forma ha de ser:
$x-2y+C=0$
Como, además, pasa por $(0, 0)$, al sustituir x e y por 0 obtenemos: $C=0$
La ecuación de la recta que buscamos es: $x-2y=0$.

4. **a)** $r:\begin{cases}x=2\\y=1-t\end{cases}$ $\qquad s:\begin{cases}x=4+w\\y=2-2w\end{cases}$

$\begin{cases}2=4+w\\1-t=2-2w\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}w=-2\\1-t=2+4\Rightarrow t=-5\end{cases}\Rightarrow A(2, 6)$

b) $r:y=\dfrac{3}{2}x-1$ $\qquad s:\begin{cases}x=-3+2t\\y=10-t\end{cases}$

Sustituyendo x e y:

$10-t=\dfrac{3}{2}(-3+2t)-1\Rightarrow 10-t=\dfrac{-9}{2}+3t-1\Rightarrow -4t=\dfrac{-31}{2}\Rightarrow t=\dfrac{31}{8}$

$x=-3+\dfrac{31}{4}=\dfrac{19}{4}$

$y=10-\dfrac{31}{8}=\dfrac{49}{8}$

El punto de intersección es $A\left(\dfrac{19}{4},\dfrac{49}{8}\right)$.

c) $r:\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-4}{-3}$ $\qquad s:x+y=0\Rightarrow y=-x$

$\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{-x-4}{-3}\Rightarrow -3x-3=-5x-20\Rightarrow x=\dfrac{-17}{2}$

El punto de intersección es $A\left(\dfrac{-17}{2},\dfrac{17}{2}\right)$.

d) $r:y+\dfrac{1}{3}=-x+4$ $\qquad s:y=-x$

$-x+\dfrac{1}{3}=-x+4\Rightarrow$ La ecuación no tiene solución, las rectas son paralelas.

Ficha: Problemas métricos

1. $r:\begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+2t \end{cases}$ $\quad s: x+5 = \dfrac{y}{2}$

Observamos que el vector director de ambas rectas es $\vec{u} = (1,\ 2)$, pero el punto $(3,\ -1)$ que pertenece a la recta r no pertenece a la recta s, por lo que las rectas son paralelas.

Para calcular la distancia entre las dos rectas, calculamos la distancia del punto $R(3,\ -1)$ de la recta r a la recta s.

Antes, escribimos la recta s en la forma general:

$s: y = 2x+10 \Rightarrow 2x - y + 10 = 0$

$d(R,s) = \dfrac{|6+1+10|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{17}{\sqrt{5}}$

Como las rectas son paralelas, el ángulo entre ellas es de 0º.

2. Ponemos la condición de que la distancia entre ambos puntos es igual a $\sqrt{13}$ unidades **:**

$d(P,Q) = \sqrt{(0-2)^2 + (1+6t)^2} = \sqrt{4+1+36t^2+12t} = \sqrt{36t^2+12t+5} = \sqrt{13}$

$36t^2 + 12t + 5 = 13 \Rightarrow 36t^2 + 12t - 8 = 0 \Rightarrow 9t^2 + 3t - 2 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{-2}{3}, t = \dfrac{1}{3}$

3.

La bisectriz del primer cuadrante es la recta es la recta que forma 45º con el eje de abscisas, es decir, la recta $y = 0$. La bisectriz pasa por el punto (0, 0), por lo que la recta es de la forma $y = mx$:

$\text{tg}\,45º = \left|\dfrac{m-0}{1}\right| = 1 \Rightarrow m = \pm 1$

La recta $y = -x$ pasa por el segundo y el cuarto cuadrante, por lo que la bisectriz del primer cuadrante es la recta $y = x$.

La recta s, perpendicular a esta bisectriz por el punto $Q(-1,0)$, es:

$y = -x + c \Rightarrow 0 = 1 + c \Rightarrow c = -1$

$s: y = -x - 1$

El punto, P, de corte de s con la bisectriz es: $\begin{cases} y = x \\ y = -x-1 \end{cases} \Rightarrow x = -x-1 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow P\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

P es el punto medio entre Q y su simétrico Q': $Q'(a,\ b) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-1+a}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{0+b}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = -1 \Rightarrow Q'(0, -1)$.

4. La recta BC pasa por el punto $B(0,\ -3)$ y su vector director es $\vec{u}=(-1,\ 5)$:

$BC: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+3}{5} \Rightarrow y = -5x - 3$

La altura buscada es la perpendicular a la recta BC que pasa por el vértice A:

$y = \dfrac{1}{5}x + c \Rightarrow 1 = \dfrac{1}{5} + c \Rightarrow c = \dfrac{4}{5}$

La altura es la recta: $y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{4}{5}$.

5. a) $r:\begin{cases} x = -4+t \\ y = 3t \end{cases}$

El vector de dirección de r es $\vec{u} = (1,\ 3)$. Un vector perpendicular es $\vec{u} = (3, -1)$, la recta es: $\begin{cases} x = -3+3t \\ y = 3-t \end{cases}$.

b) La recta perpendicular es de la forma $x - 4y + c = 0$

Como pasa por el punto $Q(0,\ 0)$ el término independiente es $c = 0$, por lo que la recta pedida es: $x - 4y = 0$.

Ficha: Propiedades de las figuras planas

1.

El área del triángulo es el producto de la base por la altura entre dos.

Escogemos uno de los lados como base, el lado BC : $d(B,C)=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

La recta BC es: $\begin{cases} x=-2t \\ y=1-t \end{cases}$

La altura del lado BC es la recta perpendicular que pasa por el punto $A(-5,1)$: $h_{BC}:\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y-1}{-2}$

El pie de la altura sobre el lado BC es el punto de intersección de la recta BC con la perpendicular h_{BC}.

$-2t+5=\dfrac{1-t-1}{-2}\Rightarrow t=2$

Sustituyendo t, hallamos que el pie de la altura es el punto $P(-4,\ -1)$

La medida de la altura es la distancia entre A y P: $d(A,P)=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

$\text{Área}=\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{2}=\dfrac{5}{2}\text{u}^2$

2.

Calculando los vectores de dirección de ambas rectas observamos que no son paralelas, por lo que dos de los lados del paralelogramo no paralelos han de estar sobre ellas.

Comprobamos también que el punto $D(1, 4)$ cumple la ecuación de la recta r y el punto B cumple la ecuación de la recta s.

Veamos cuál es el punto de intersección de ambas rectas:

$$\begin{cases} 3x-y+1=0 \\ -2x+5y-3=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 15x-5y+5=0 \\ -2x+5y-3=0 \end{cases}\Rightarrow 13x=2\Rightarrow x=\frac{2}{13}\Rightarrow y=\frac{19}{13}$$

LLamamos a este nuevo vértice del paralelogramo $A\left(\dfrac{2}{13},\dfrac{9}{13}\right)$.

El vértice C que falta es la intersección de la recta paralela a r por B y la recta paralela a s por D:

$r':3x-y+K=0\Rightarrow 18-3+K=0\Rightarrow K=-15 \qquad r':3x-y-15=0$

$s':-2x+5y+K'=0\Rightarrow -2+20+K'=0\Rightarrow K'=-18 \qquad s':-2x+5y-18=0$

C es la intersección de r' y s':

$$\begin{cases} 3x-y-15=0 \\ -2x+5y-18=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 15x-5y-75=0 \\ -2x+5y-18=0 \end{cases}\Rightarrow 13x-93=0\Rightarrow x=\frac{93}{13}\Rightarrow y=3\cdot\frac{93}{13}-15=\frac{84}{13}$$

El vértice C es el punto $C\left(\dfrac{93}{13},\dfrac{84}{13}\right)$.

3. La distancia entre los dos puntos consecutivos, $A(0,4)$ y $B(-3,0)$, es la medida del lado del cuadrado:

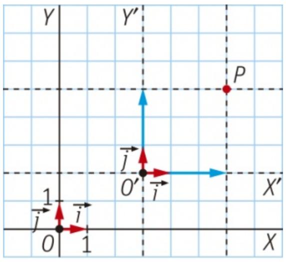
$l=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$

El área del cuadrado es $A=5^2=25\text{ u}^2$.

PROFUNDIZACIÓN

Ficha: Cambio de sistema de referencia

1. **a)** Representamos gráficamente la situación:



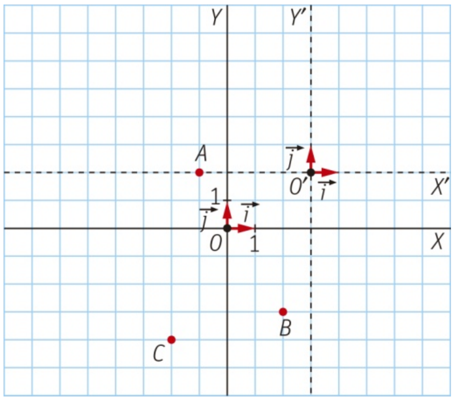
Las coordenadas de *P*respecto *R*’ son *P*(3, 3).

b) En *R*’ las coordenadas de los puntos pedidos son:

A(−4, 0)

B(−1, −5)

C(−5,−6)

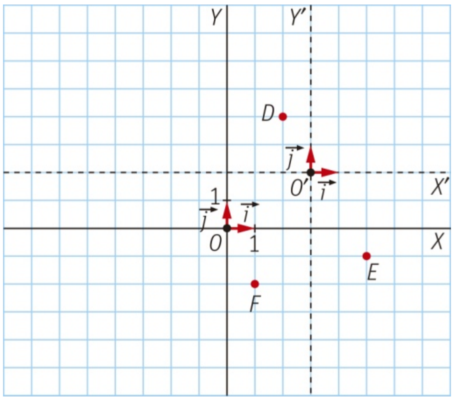


c) En *R* las coordenadas de los puntos pedidos son:

D(2, 4)

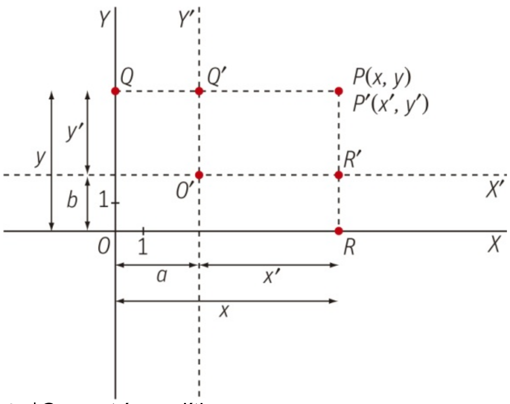
E(5, −1)

F(1,−2)



d) En *R*’ las coordenadas de *X* son *X*(*x*', *y*') = (*x*−3, *y*−2).

2.



$$\overline{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$x\vec{i} = \overline{QP} = \overline{QQ'} + \overline{Q'P} = a\vec{i} + x'\vec{i} \Rightarrow x = a + x' \Rightarrow x' = x - a$$

$$y\vec{j} = \overline{RP} = \overline{RR'} + \overline{R'P} = b\vec{j} + y'\vec{j} \Rightarrow y = b + y' \Rightarrow y' = y - b$$

3. a) Por ejemplo, $A(0, 3)$ y $B(-1, 1)$ son dos puntos de la recta dada. Sus coordenadas respecto del sistema de referencia moderno serán:
$A(0+2, 3-1) = A(2, 2)$ y $B(-1+2, 1-1) = B(1, 0)$

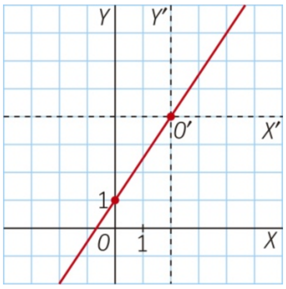
b) La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 2)$ y $B(1, 0)$ es: $\dfrac{x'-2}{1-2} = \dfrac{y'-2}{0-2} \Rightarrow 2x'-y'-2=0$.

c) $\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'-2 \\ y = y'+1 \end{cases}$

d) $2(x'-2)-(y'+1)+3=0 \Rightarrow 2x'-y'-2=0$

4. Las ecuaciones de la traslación de ejes son:

$\begin{cases} x' = x-2 \\ y' = y-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'+2 \\ y = y'+a \end{cases}$



Por lo tanto, la nueva ecuación será:

$3(x'+2)-2(y'+a)+2=0 \Rightarrow 3x'-2y'+8-2a=0$

Para que la nueva ecuación carezca de término independiente:

$8-2a=0 \Rightarrow a=4$