Combinatoria

David Matellano

Departamento de Matemáticas. IES Ángel Corella. (Colmenar Viejo)

12 de mayo de 2020

índice de contenidos I

1. Operaciones matemáticas en combinatoria
   - Factorial de un número n
   - Números combinatorios
2. Variaciones
   - Variaciones sin repetición
   - Variaciones con repetición
3. Permutaciones
   - Permutaciones sin repetición
     - Permutaciones circulares
4. Combinaciones
   - Combinaciones sin repetición
   - Combinaciones con repetición
5. Mapa conceptual

Factorial de un número n

Definición

Sea $n \in \mathbb{Z}/n \geq 0$

- Definimos $n!$

Factorial de un número n

Definición

Sea $n \in \mathbb{Z}/n \geq 0$

- Definimos $n!$
- $Si\ n \geq 1 \Rightarrow n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$

Factorial de un número n

Definición

Sea $n \in \mathbb{Z} / n \geq 0$

- Definimos $n!$
- $Si\ n \geq 1 \Rightarrow n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$
- $Si\ n = 0 \Rightarrow 0! = 1$

Factorial de un número n

Definición

Sea $n \in \mathbb{Z}/n \geq 0$

- Definimos $n!$
- $Si\ n \geq 1 \Rightarrow n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$
- $Si\ n = 0 \Rightarrow 0! = 1$
- Ejemplo: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Factorial de un número n

Definición

Sea $n \in \mathbb{Z}/n \geq 0$

- Definimos $n!$
- $Si\ n \geq 1 \Rightarrow n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$
- $Si\ n = 0 \Rightarrow 0! = 1$
- Ejemplo: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
- Obsérvese que $n! = n \cdot (n-1)!\ \forall n \geq 1$

Factorial de un número n

Definición

Sea $n \in \mathbb{Z}/n \geq 0$

- Definimos $n!$
- $Si\ n \geq 1 \Rightarrow n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$
- $Si\ n = 0 \Rightarrow 0! = 1$
- Ejemplo: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
- Obsérvese que $n! = n \cdot (n-1)!\ \forall n \geq 1$
- Ejemplo: $5! = 5 \cdot {\color{red}4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot {\color{red}4!}$

Números combinatorios

Definición

Definición de *m sobre n*

- Sean $m, n \in \mathbb{Z} / m, n \geq 0$ y $m \geq n$

Números combinatorios

Definición

Definición de *m sobre n*

- Sean $m, n \in \mathbb{Z} / m, n \geq 0$ y $m \geq n$
- Definimos *m sobre n*: $\binom{m}{n} = \dfrac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$

Números combinatorios

Definición

Definición de *m sobre n*

- Sean $m, n \in \mathbb{Z} / m, n \geq 0$ y $m \geq n$
- Definimos *m sobre n*: $\binom{m}{n} = \dfrac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$
- Ejemplo: $\binom{8}{6} = \dfrac{8!}{6! \cdot 2!} = 28$

Números combinatorios

Propiedades

Propiedades de los números combinatorios

- $\binom{m}{m} = 1 \quad \xrightarrow{\text{Ejemplo:}} \binom{8}{8} = 1$

Números combinatorios

Propiedades

Propiedades de los números combinatorios

- $\binom{m}{m} = 1 \xrightarrow{\text{Ejemplo:}} \binom{8}{8} = 1$
- $\binom{m}{0} = 1 \xrightarrow{\text{Ejemplo:}} \binom{8}{0} = 1$

Números combinatorios

Propiedades

Propiedades de los números combinatorios

- $\binom{m}{m} = 1 \xrightarrow{\text{Ejemplo:}} \binom{8}{8} = 1$
- $\binom{m}{0} = 1 \xrightarrow{\text{Ejemplo:}} \binom{8}{0} = 1$
- $\binom{m}{1} = m \xrightarrow{\text{Ejemplo:}} \binom{8}{1} = 8$

Números combinatorios

Propiedades

Propiedades de los números combinatorios

- $\binom{m}{m} = 1 \quad \xrightarrow{\text{Ejemplo:}} \quad \binom{8}{8} = 1$
- $\binom{m}{0} = 1 \quad \xrightarrow{\text{Ejemplo:}} \quad \binom{8}{0} = 1$
- $\binom{m}{1} = m \quad \xrightarrow{\text{Ejemplo:}} \quad \binom{8}{1} = 8$
- $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n} \quad \xrightarrow{\text{Ejemplo:}} \quad \binom{8}{2} = \binom{8}{6}$

Variaciones

Tomamos m elementos de n en n

Variaciones **sin repetición**

1. Sean m elementos, de los que tomamos n, siendo $n < m$

Variaciones

Tomamos m elementos de n en n

Variaciones **sin repetición**

1. Sean m elementos, de los que tomamos n, siendo $n < m$
2. El orden de la elección si importa

Variaciones

Tomamos m elementos de n en n

Variaciones **sin repetición**

1. Sean m elementos, de los que tomamos n, siendo $n < m$
2. El orden de la elección si importa
3. No podemos repetir ningún elemento

Variaciones

Tomamos m elementos de n en n

Variaciones **sin repetición**

1. Sean m elementos, de los que tomamos n, siendo $n < m$
2. El orden de la elección si importa
3. No podemos repetir ningún elemento

- El número de agrupaciones posibles será:

Variaciones

Tomamos m elementos de n en n

Variaciones **sin repetición**

1. Sean m elementos, de los que tomamos n, siendo $n < m$
2. El orden de la elección si importa
3. No podemos repetir ningún elemento

- El número de agrupaciones posibles será:
- $$\boxed{V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-n+1)}_{n \text{ términos}}}$$

Variaciones

Tomamos m elementos de n en n

Variaciones **sin repetición**

1. Sean m elementos, de los que tomamos n, siendo $n < m$
2. El orden de la elección si importa
3. No podemos repetir ningún elemento

- El número de agrupaciones posibles será:
- $$\boxed{V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-n+1)}_{n \text{ términos}}}$$
- Demostración de la igualdad anterior:

Variaciones

Tomamos m elementos de n en n

Variaciones **sin repetición**

1. Sean m elementos, de los que tomamos n, siendo $n < m$
2. El orden de la elección si importa
3. No podemos repetir ningún elemento

- El número de agrupaciones posibles será:
- $$\boxed{V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-n+1)}_{n \text{ términos}}}$$
- Demostración de la igualdad anterior:
- $$V_{m,n} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-n+1) \cdot \cancel{(m-n)!}}{\cancel{(m-n)!}}$$

Variaciones

Tomamos m elementos de n en n

Ejemplo

- Se sortean 3 viajes distintos entre 25 alumnos, de manera que ninguno pueda repetir premio. El número de variaciones será:

Variaciones

Tomamos m elementos de n en n

Ejemplo

- Se sortean 3 viajes distintos entre 25 alumnos, de manera que ninguno pueda repetir premio. El número de variaciones será:
- $V_{25,3} = \underbrace{25 \cdot 24 \cdot 23}_{3 \text{ términos}} = 13800$

Variaciones

Tomamos m elementos de n en n

Ejemplo

- Se sortean 3 viajes distintos entre 25 alumnos, de manera que ninguno pueda repetir premio. El número de variaciones será:
- $V_{25,3} = \underbrace{25 \cdot 24 \cdot 23}_{3 \text{ términos}} = 13800$
- Equivalente a: $V_{25,3} = \dfrac{25!}{(25-3)!} = \dfrac{25!}{22!}$

Variaciones con repetición

Tomamos m elementos de n en n, pero pudiéndose repetir

Variaciones **con repetición**

1. Sean m elementos, de los que tomamos n, siendo $n < m$

Variaciones con repetición

Tomamos m elementos de n en n, pero pudiéndose repetir

Variaciones **con repetición**

1. Sean m elementos, de los que tomamos n, siendo $n < m$
2. El orden de la elección si importa.

Variaciones con repetición

Tomamos m elementos de n en n, pero pudiéndose repetir

Variaciones **con repetición**

1. Sean m elementos, de los que tomamos n, siendo $n < m$
2. El orden de la elección si importa.
3. Ahora **podemos repetir los elementos.**

Variaciones con repetición

Tomamos m elementos de n en n, pero pudiéndose repetir

Variaciones **con repetición**

1. Sean m elementos, de los que tomamos n, siendo $n < m$
2. El orden de la elección si importa.
3. Ahora **podemos repetir los elementos.**

- El número de agrupaciones posibles será:

Variaciones con repetición

Tomamos m elementos de n en n, pero pudiéndose repetir

Variaciones **con repetición**

1. Sean m elementos, de los que tomamos n, siendo $n < m$
2. El orden de la elección si importa.
3. Ahora **podemos repetir los elementos.**

- El número de agrupaciones posibles será:
- $\boxed{VR_{m,n} = m^n}$

Variaciones con repetición

Tomamos m elementos de n en n, pero pudiéndose repetir

Ejemplo

- Un partido de una quiniela tiene como posibles resultados 1, x, 2. Determine el número de quinielas distintas que se pueden hacer con 15 partidos.

Variaciones con repetición

Tomamos m elementos de n en n, pero pudiéndose repetir

Ejemplo

- Un partido de una quiniela tiene como posibles resultados $1,\ x,\ 2$. Determine el número de quinielas distintas que se pueden hacer con 15 partidos.
- $\boxed{VR_{3,15} = 3^{15} = 14348907}$

Permutaciones

Permutaciones sin repetición

Definición

- Una permutación es una **variación** en la que se toman **todos** sus términos.

Permutaciones

Permutaciones sin repetición

Definición

- Una permutación es una **variación** en la que se toman **todos** sus términos.
- Por lo tanto:

Permutaciones

Permutaciones sin repetición

Definición

- Una permutación es una **variación** en la que se toman **todos** sus términos.
- Por lo tanto:
  1. **Importa** el orden

Permutaciones

Permutaciones sin repetición

Definición

- Una permutación es una **variación** en la que se toman **todos** sus términos.
- Por lo tanto:
  1. **Importa** el orden
  2. Tomamos **todos** sus términos **sin repetir** ninguno.

Permutaciones

Permutaciones sin repetición

Definición

- Una permutación es una **variación** en la que se toman **todos** sus términos.
- Por lo tanto:
  1. **Importa** el orden
  2. Tomamos **todos** sus términos **sin repetir** ninguno.
- El número de agrupaciones será: $\boxed{P_n = V_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!}$

Permutaciones

Permutaciones sin repetición

Ejemplo

- Queremos hacer una fila con 8 alumnos. ¿Cuántas filas distintas podemos hacer?

Permutaciones

Permutaciones sin repetición

Ejemplo

- Queremos hacer una fila con 8 alumnos. ¿Cuántas filas distintas podemos hacer?
- Solución: $P_8 = 8! = 40320$

Permutaciones

Permutaciones circulares sin repetición

Definición

- Se dice que una permutación es circular si el primer elemento enlaza con el último, es decir, si se pueden *colocar en círculo*

Permutaciones

Permutaciones circulares sin repetición

Definición

- Se dice que una permutación es circular si el primer elemento enlaza con el último, es decir, si se pueden *colocar en círculo*
- El número de agrupaciones coincide con la permutación obtenida al eliminar un elemento:

Permutaciones

Permutaciones circulares sin repetición

Definición

- Se dice que una permutación es circular si el primer elemento enlaza con el último, es decir, si se pueden *colocar en círculo*
- El número de agrupaciones coincide con la permutación obtenida al eliminar un elemento:
- $\boxed{PC_n = P_{n-1} = (n-1)!}$

Permutaciones

Permutaciones circulares sin repetición

Ejemplo

- ¿De cuántas maneras distintas podemos colocar 6 comensales en una mesa circular?

Permutaciones

Permutaciones circulares sin repetición

Ejemplo

- ¿De cuántas maneras distintas podemos colocar 6 comensales en una mesa circular?
- Solución: $\boxed{PC_6 = P_5 = 5! = 120}$

Permutaciones

Permutaciones **con** repetición

Definición

- Tenemos una permutación de i elementos distintos que se pueden repetir, de manera que el primero se repite n_1 veces, el segundo n_2 veces y así sucesivamente hasta sumar n elementos.

Permutaciones

Permutaciones **con** repetición

Definición

- Tenemos una permutación de i elementos distintos que se pueden repetir, de manera que el primero se repite n_1 veces, el segundo n_2 veces y así sucesivamente hasta sumar n elementos.
- El número de agrupaciones se calcula como:

Permutaciones

Permutaciones **con** repetición

Definición

- Tenemos una permutación de i elementos distintos que se pueden repetir, de manera que el primero se repite n_1 veces, el segundo n_2 veces y así sucesivamente hasta sumar n elementos.
- El número de agrupaciones se calcula como:
- $\boxed{PR_n^{n_1,n_2,\ldots n_i} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_i!}}$

Permutaciones

Permutaciones **con** repetición

Ejemplo

- ¿Cuántas palabras de 10 letras podemos formar con las letras de la palabra **talanquera**?

Permutaciones

Permutaciones **con** repetición

Ejemplo

- ¿Cuántas palabras de 10 letras podemos formar con las letras de la palabra **talanquera**?
- Tenemos 10 letras en total, con 8 letras distintas de manera que la letra *a* se repite 3 veces. Así:

Permutaciones

Permutaciones **con** repetición

Ejemplo

- ¿Cuántas palabras de 10 letras podemos formar con las letras de la palabra **talanquera**?
- Tenemos 10 letras en total, con 8 letras distintas de manera que la letra *a* se repite 3 veces. Así:
- $$\boxed{PR_{10}^{3,1,1,\ldots 1} = \frac{10!}{3!} = 604800}$$

Combinaciones

Combinaciones sin repetición

Definión de combinaciones **sin repetición.**

1. Tomamos n elementos de un conjunto de m elementos, siendo $n \leq m$

Combinaciones

Combinaciones sin repetición

Definión de combinaciones **sin repetición.**

1. Tomamos n elementos de un conjunto de m elementos, siendo $n \leq m$
2. No importa el orden.

Combinaciones

Combinaciones sin repetición

Definión de combinaciones **sin repetición.**

1. Tomamos n elementos de un conjunto de m elementos, siendo $n \leq m$
2. No importa el orden.
3. No hay repetición de elementos.

Combinaciones

Combinaciones sin repetición

Definión de combinaciones **sin repetición.**

1. Tomamos n elementos de un conjunto de m elementos, siendo $n \leq m$
2. No importa el orden.
3. No hay repetición de elementos.

- El numero de combinaciones posibles será:

Combinaciones

Combinaciones sin repetición

Definión de combinaciones **sin repetición.**

1. Tomamos n elementos de un conjunto de m elementos, siendo $n \leq m$
2. No importa el orden.
3. No hay repetición de elementos.

- El numero de combinaciones posibles será:
- $\boxed{C_{m,n} = \binom{m}{n}}$

Combinaciones

Combinaciones sin repetición

Ejemplo

- Elegimos de una clase de 30 alumnos un conjunto de 5 alumnos para que formen un equipo para representar a su clase en un concurso. ¿Cuántos equipos distintos podemos formar?

Combinaciones

Combinaciones sin repetición

Ejemplo

- Elegimos de una clase de 30 alumnos un conjunto de 5 alumnos para que formen un equipo para representar a su clase en un concurso. ¿Cuántos equipos distintos podemos formar?
- Solución: $\boxed{N = \binom{30}{5} = \frac{30!}{5! \cdot 25!} = 142506}$

Combinaciones

Combinaciones **con** repetición

Definión de combinaciones **con repetición.**

1. Tomamos n elementos de un conjunto de m elementos, siendo $n \leq m$

Combinaciones

Combinaciones **con** repetición

Definión de combinaciones con repetición.

1. Tomamos n elementos de un conjunto de m elementos, siendo $n \leq m$
2. No importa el orden.

Combinaciones

Combinaciones **con** repetición

Definión de combinaciones **con repetición.**

1. Tomamos n elementos de un conjunto de m elementos, siendo $n \leq m$
2. No importa el orden.
3. Se pueden repetir los elementos.

Combinaciones

Combinaciones **con** repetición

Definión de combinaciones **con repetición.**

1. Tomamos n elementos de un conjunto de m elementos, siendo $n \leq m$
2. No importa el orden.
3. Se pueden repetir los elementos.

- El numero de combinaciones posibles será:

Combinaciones

Combinaciones **con** repetición

Definión de combinaciones **con repetición.**

1. Tomamos n elementos de un conjunto de m elementos, siendo $n \leq m$
2. No importa el orden.
3. Se pueden repetir los elementos.

- El numero de combinaciones posibles será:
- $$\boxed{CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{n}}$$

Combinaciones

Combinaciones **con** repetición

Ejemplo

- Una panadería elabora ocho tipos de barras de pan diferentes. Si escogemos cuatro de ellas, pudiéndose repetir el tipo de barra, ¿cuántas combinaciones de barras de pan podemos elegir?

Combinaciones

Combinaciones **con** repetición

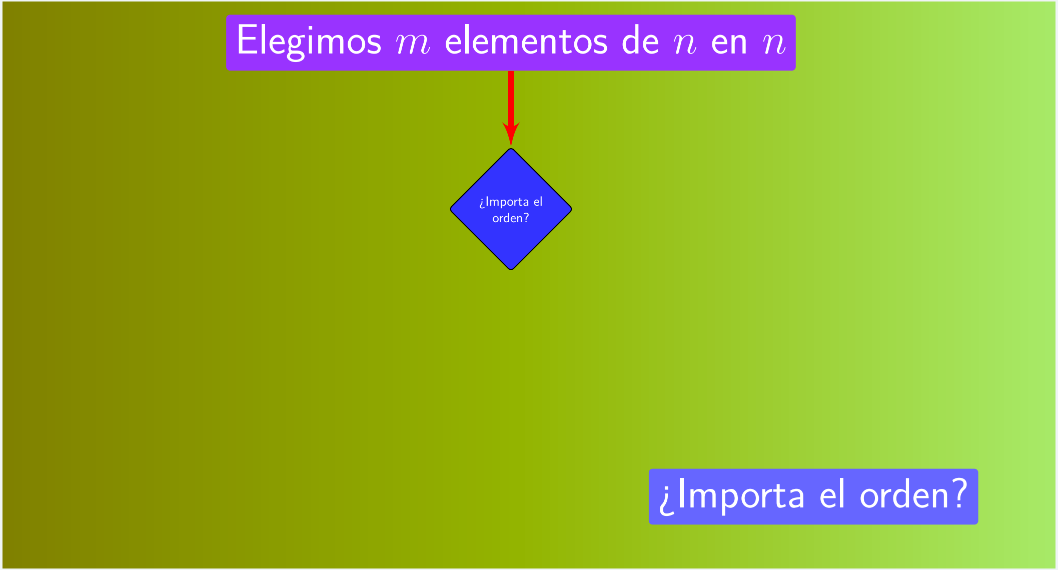
Ejemplo

- Una panadería elabora ocho tipos de barras de pan diferentes. Si escogemos cuatro de ellas, pudiéndose repetir el tipo de barra, ¿cuántas combinaciones de barras de pan podemos elegir?
- Solución: $\boxed{CR_{8,4} = \binom{8+4-1}{4} = \binom{11}{4} = 330}$

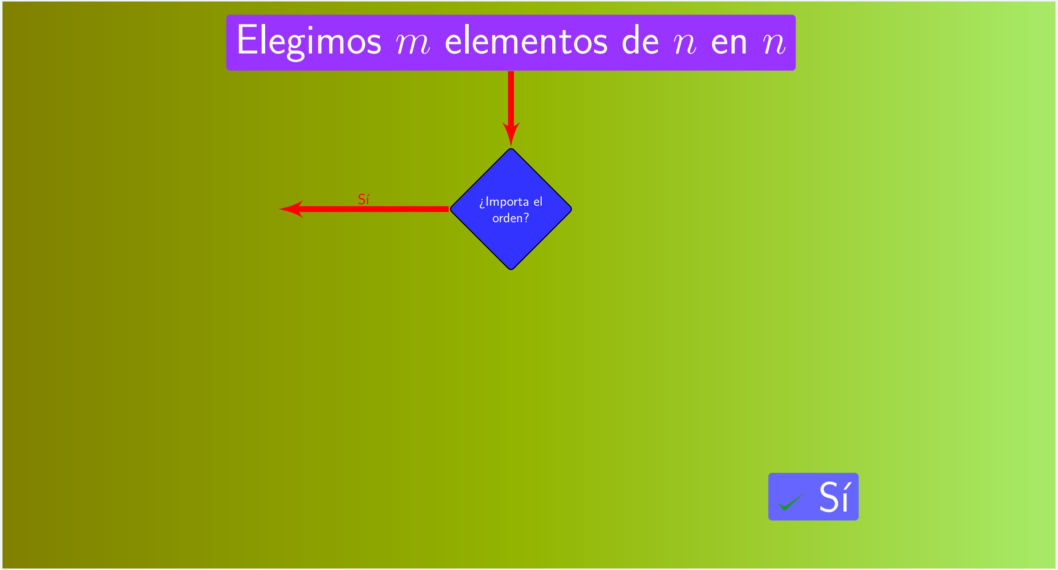
Mapa conceptual

Elegimos m elementos de n en n

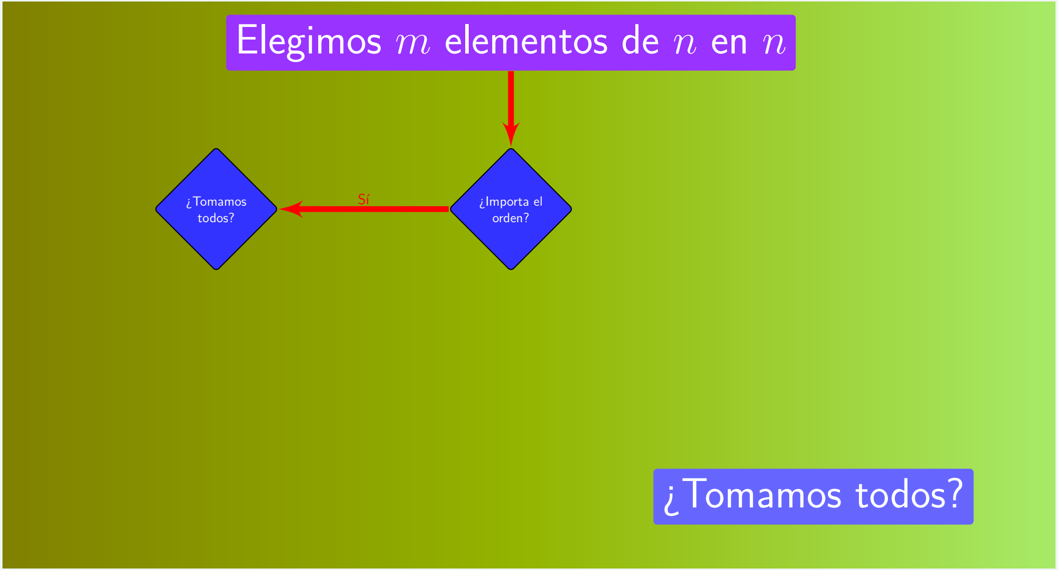
Mapa conceptual



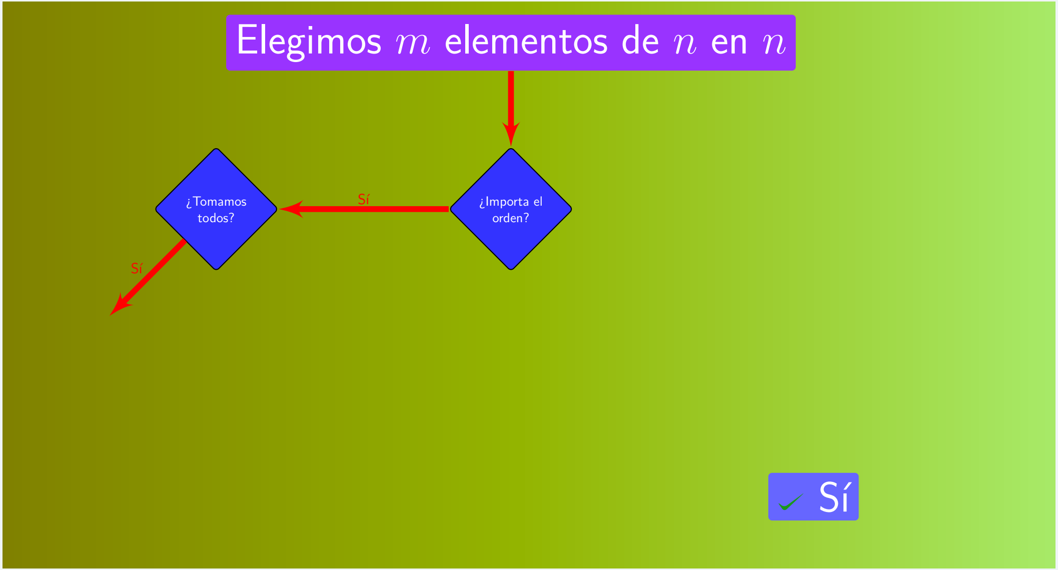
Mapa conceptual



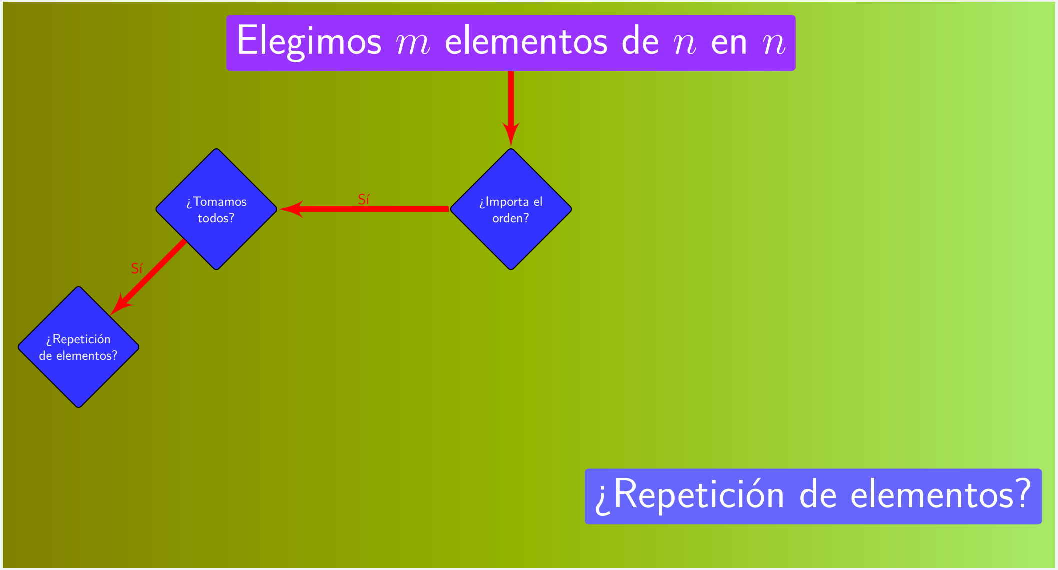
Mapa conceptual



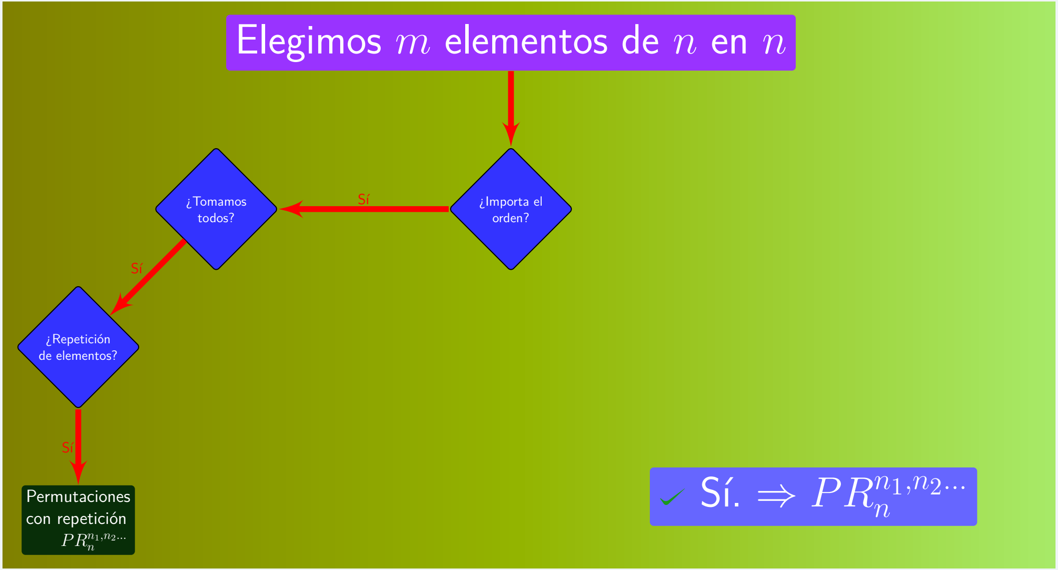
Mapa conceptual



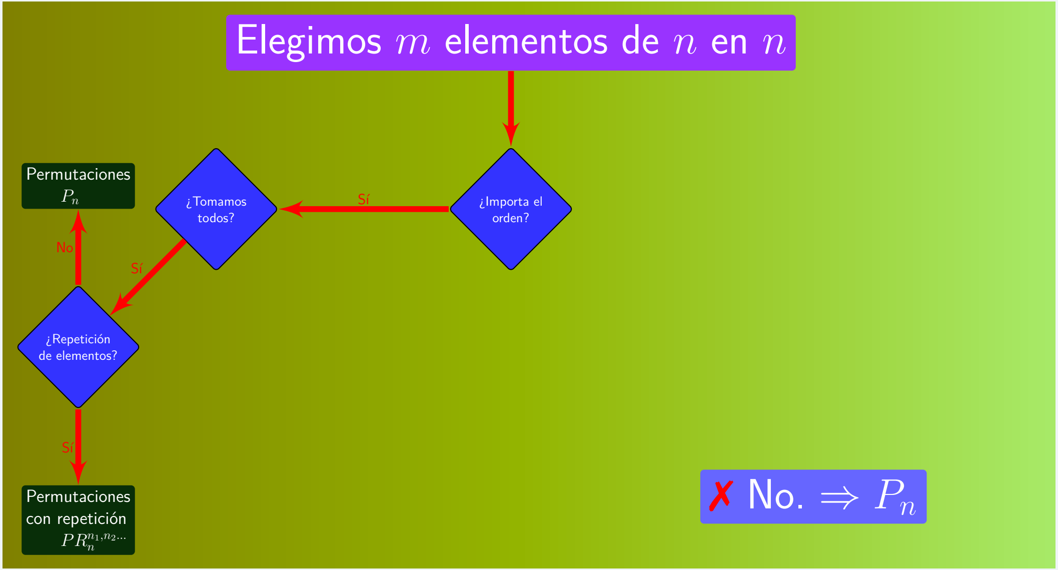
Mapa conceptual



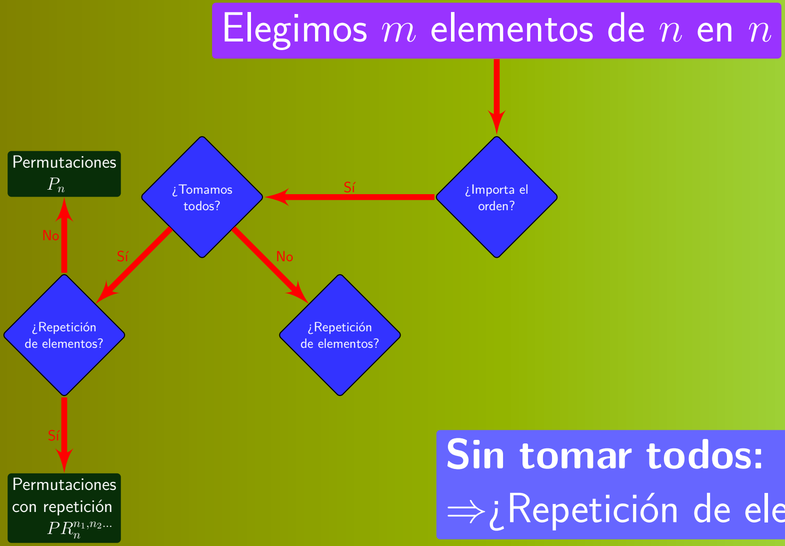
Mapa conceptual



Mapa conceptual



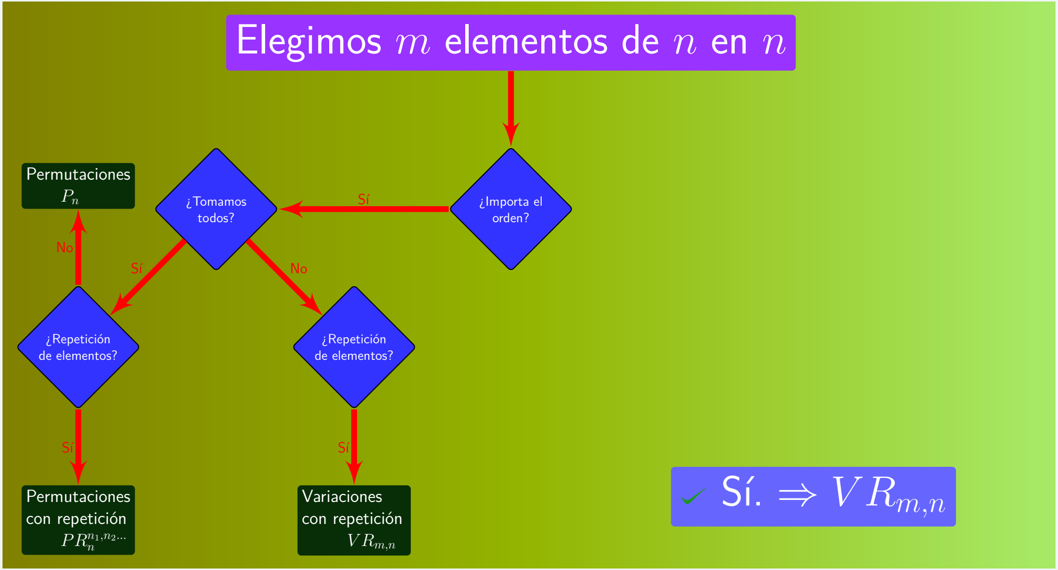
Mapa conceptual



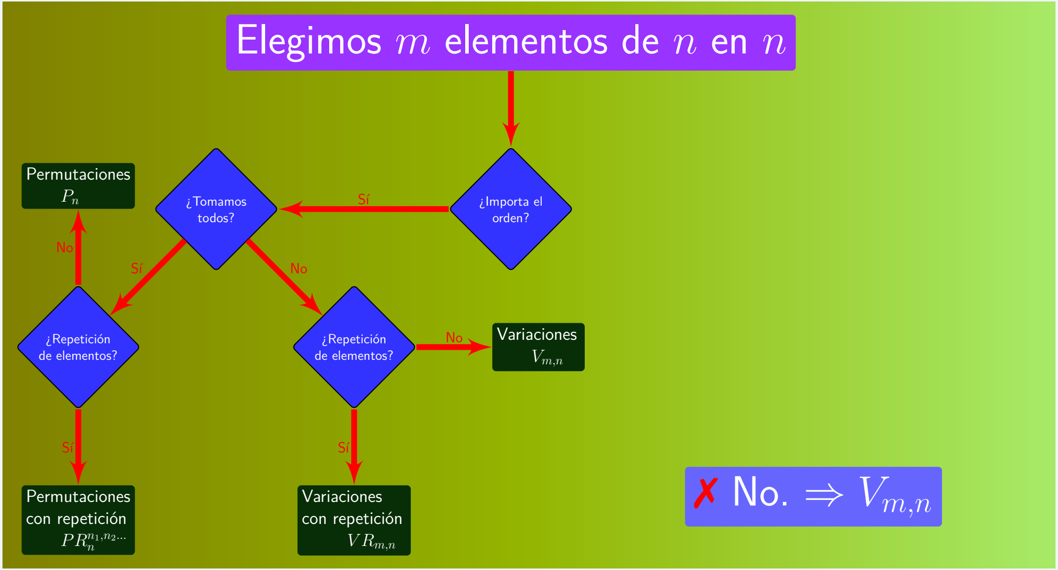
Sin tomar todos:

$\Rightarrow$¿Repetición de elementos?

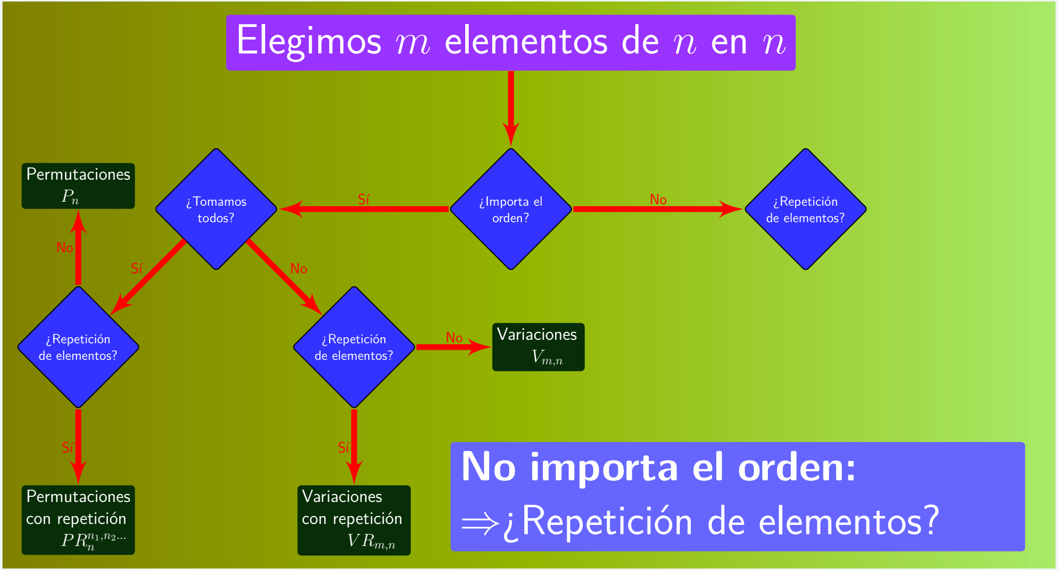
Mapa conceptual



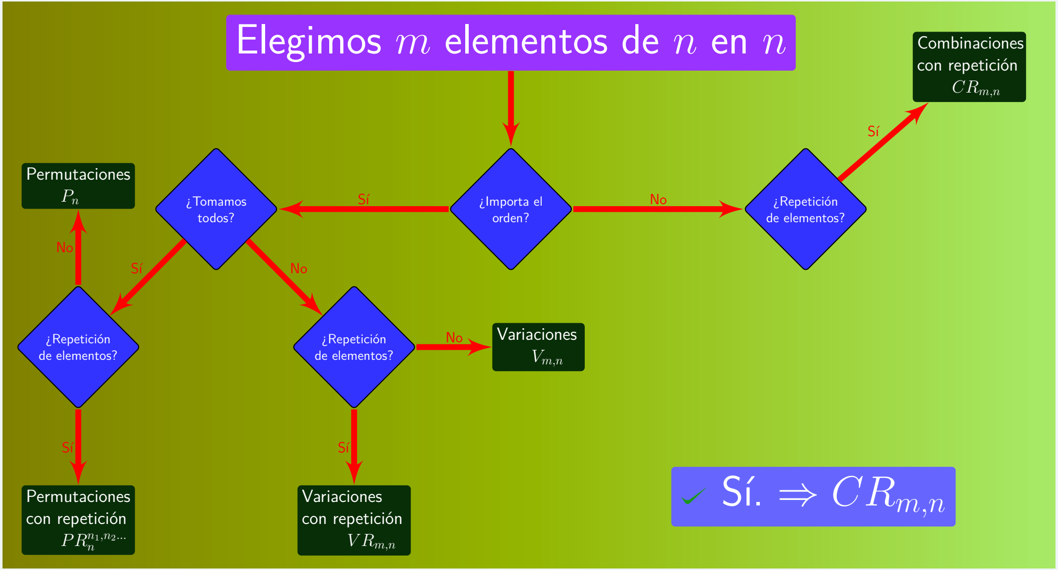
Mapa conceptual



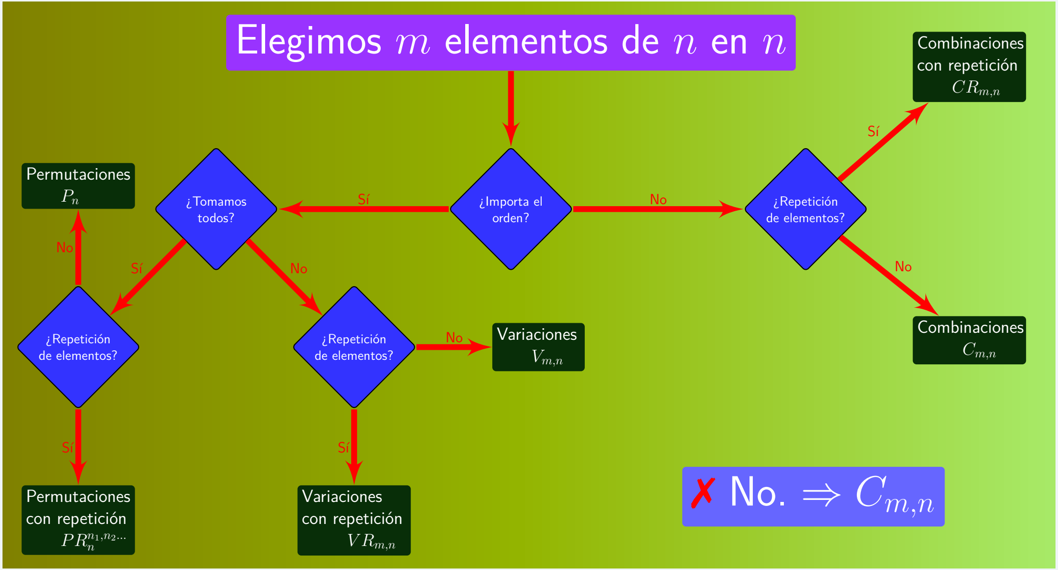
Mapa conceptual



Mapa conceptual



Mapa conceptual



Mapa conceptual