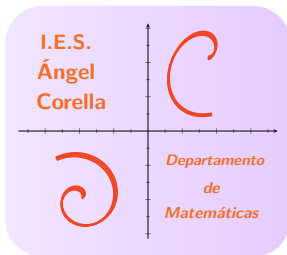


Probabilidad

David Matellano

Departamento de Matemáticas. IES Ángel Corella. (Colmenar Viejo)

13 de mayo de 2019



índice de contenidos I

- 1 Definición de probabilidad
 - Tipos de sucesos
 - Suceso contrario
 - Sucesos compatibles e incompatibles
 - Espacio muestral
- 2 La Ley de Laplace
- 3 Unión e intersección de sucesos
 - Unión de dos sucesos
 - Intersección de dos sucesos
 - Probabilidades de $A \cup B$ y $A \cap B$
- 4 Probabilidad condicionada
- 5 Ley de la Probabilidad Total
- 6 Fórmula de Bayes

Probabilidad

Definición de probabilidad

Definición de probabilidad

- Sea A un resultado de un experimento aleatorio.

Probabilidad

Definición de probabilidad

Definición de probabilidad

- Sea A un resultado de un experimento aleatorio.
- La probabilidad de que ocurra el suceso A , $P(A)$, indica la facilidad con la que puede obtenerse el resultado A en dicho experimento.

Probabilidad

Definición de probabilidad

Definición de probabilidad

- Sea A un resultado de un experimento aleatorio.
- La probabilidad de que ocurra el suceso A , $P(A)$, indica la facilidad con la que puede obtenerse el resultado A en dicho experimento.
- $0 \leq P(A) \leq 1$

Tipos de sucesos

Tipos de sucesos según su probabilidad

- Calsificación de un suceso A según su probabilidad:

Ejemplos

-
-
-
-
-

Tipos de sucesos

Tipos de sucesos según su probabilidad

- Calsificación de un suceso A según su probabilidad:
 - Suceso imposible: $\Rightarrow P(A) = 0$

Ejemplos

- Obtener un número decimal en un dado.
-
-
-
-

Tipos de sucesos

Tipos de sucesos según su probabilidad

- Calsificación de un suceso A según su probabilidad:
 - Suceso imposible: $\Rightarrow P(A) = 0$
 - Suceso muy improbable:
 $\Rightarrow P(A) \gtrsim 0$

Ejemplos

-
- Que toque nuestro número en la lotería.
-
-
-

Tipos de sucesos

Tipos de sucesos según su probabilidad

- Calsificación de un suceso A según su probabilidad:
 - Suceso imposible: $\Rightarrow P(A) = 0$
 - Suceso muy improbable:
 $\Rightarrow P(A) \gtrsim 0$
 - Suceso muy probable: $\Rightarrow P(A) \lesssim 1$

Ejemplos

-
-
- Lanzar 20 monedas y obtener alguna cara.
-
-

Tipos de sucesos

Tipos de sucesos según su probabilidad

- Calsificación de un suceso A según su probabilidad:
 - Suceso imposible: $\Rightarrow P(A) = 0$
 - Suceso muy improbable:
 $\Rightarrow P(A) \gtrsim 0$
 - Suceso muy probable: $\Rightarrow P(A) \lesssim 1$
 - Suceso seguro: $P(A) = 1$

Ejemplos

-
-
-
- Obtener un número natural en un dado.
-

Tipos de sucesos

Tipos de sucesos según su probabilidad

- Calsificación de un suceso A según su probabilidad:
 - Suceso imposible: $\Rightarrow P(A) = 0$
 - Suceso muy improbable:
 $\Rightarrow P(A) \gtrsim 0$
 - Suceso muy probable: $\Rightarrow P(A) \lesssim 1$
 - Suceso seguro: $P(A) = 1$
 - **Sucesos equiprobables: Tienen igual probabilidad.**

Ejemplos

-
-
-
-
- Obtener cara y obtener cruz en una moneda

Suceso contrario de un suceso A

Suceso contrario de un suceso A

- Sea un suceso A

Suceso contrario de un suceso A

Suceso contrario de un suceso A

- Sea un suceso A
- Se define su suceso contrario como \overline{A}

Suceso contrario de un suceso A

Suceso contrario de un suceso A

- Sea un suceso A
- Se define su suceso contrario como \overline{A}
- \overline{A} se verifica cuando **no ocurre** A

Suceso contrario de un suceso A

Suceso contrario de un suceso A

- Sea un suceso A
- Se define su suceso contrario como \overline{A}
- \overline{A} se verifica cuando **no ocurre** A
- Su probabilidad cumple: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Suceso contrario de un suceso A

Suceso contrario de un suceso A

- Sea un suceso A
- Se define su suceso contrario como \bar{A}
- \bar{A} se verifica cuando **no ocurre** A
- Su probabilidad cumple: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Ejemplo:

Suceso contrario de un suceso A

Suceso contrario de un suceso A

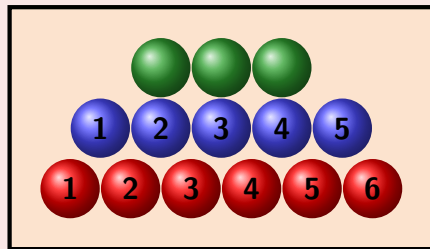
- Sea un suceso A
- Se define su suceso contrario como \bar{A}
- \bar{A} se verifica cuando **no ocurre** A
- Su probabilidad cumple: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Ejemplo:
 - $A \equiv$ Obtener una bola par de una urna.

Suceso contrario de un suceso A

Suceso contrario de un suceso A

- Sea un suceso A
- Se define su suceso contrario como \bar{A}
- \bar{A} se verifica cuando **no ocurre** A
- Su probabilidad cumple: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Ejemplo:
 - $A \equiv$ Obtener una bola par de una urna.
 - $\bar{A} \equiv$ **No** obtener una bola par de una urna.

Figuras



Sucesos compatibles e incompatibles

Sucesos compatibles e incompatibles

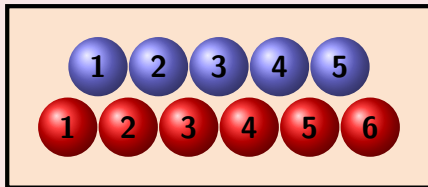
- Dos sucesos A y B son compatibles si se pueden verificar a la vez.

Sucesos compatibles e incompatibles

Sucesos compatibles e incompatibles

- Dos sucesos A y B son compatibles si se pueden verificar a la vez.
- Ejemplo: Obtener una bola par y obtener una bola roja de esta urna.

Figuras



Sucesos compatibles e incompatibles

Sucesos compatibles e incompatibles

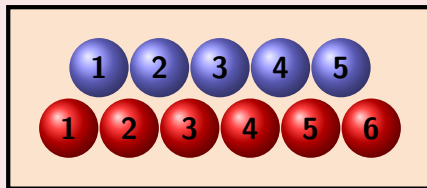
- Dos sucesos A y B son compatibles si se pueden verificar a la vez.
- Ejemplo: Obtener una bola par y obtener una bola roja de esta urna.
- En caso contrario son incompatibles.

Sucesos compatibles e incompatibles

Sucesos compatibles e incompatibles

- Dos sucesos A y B son compatibles si se pueden verificar a la vez.
- Ejemplo: Obtener una bola par y obtener una bola roja de esta urna.
- En caso contrario son incompatibles.
- Ejemplo: Obtener una bola par y obtener una bola impar de esta urna.

Figuras



Espacio muestral

Espacio muestral

- Se define el espacio muestral E como el conjunto de posibles resultados al realizar un experimento aleatorio.

Espacio muestral

Espacio muestral

- Se define el espacio muestral E como el conjunto de posibles resultados al realizar un experimento aleatorio.
- Se representa como: $E = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$

Espacio muestral

Espacio muestral

- Se define el espacio muestral E como el conjunto de posibles resultados al realizar un experimento aleatorio.
- Se representa como: $E = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$
- La suma de las probabilidades de sus sucesos es 1: $\sum_{i=1}^n P(S_i) = 1$

Probabilidad de un suceso A

- Sea un espacio muestral E

Probabilidad de un suceso A

- Sea un espacio muestral E
- Si todos los sucesos de E son equiprobables, se cumple:

Probabilidad de un suceso A

- Sea un espacio muestral E
- Si todos los sucesos de E son equiprobables, se cumple:
 - La probabilidad de un suceso A es el cociente entre sus casos favorables y sus casos totales.

Probabilidad de un suceso A

- Sea un espacio muestral E
- Si todos los sucesos de E son equiprobables, se cumple:
 - La probabilidad de un suceso A es el cociente entre sus casos favorables y sus casos totales.

- $$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}}$$

Probabilidad de un suceso A

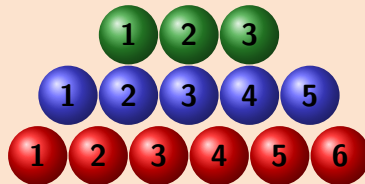
- Sea un espacio muestral E
- Si todos los sucesos de E son equiprobables, se cumple:
 - La probabilidad de un suceso A es el cociente entre sus casos favorables y sus casos totales.

- $$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}}$$

Ejemplo

- Calcula la probabilidad de obtener una bola roja en la siguiente urna.

Figuras



Probabilidad de un suceso A

- Sea un espacio muestral E
- Si todos los sucesos de E son equiprobables, se cumple:
 - La probabilidad de un suceso A es el cociente entre sus casos favorables y sus casos totales.

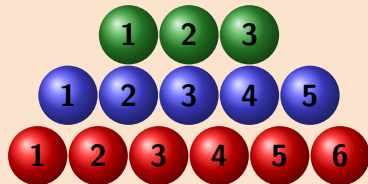
- $$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}}$$

Ejemplo

- Calcula la probabilidad de obtener una bola roja en la siguiente urna.

- $$P(R) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

Figuras



Unión e intersección de sucesos

Unión de dos sucesos

Unión de dos sucesos A y B

- La unión de ambos sucesos se verifica cuando ocurre al menos uno de ellos.

Unión e intersección de sucesos

Unión de dos sucesos

Unión de dos sucesos A y B

- La unión de ambos sucesos se verifica cuando ocurre al menos uno de ellos.
- Se representa como $A \cup B$

Unión e intersección de sucesos

Intersección de dos sucesos

Intersección de dos sucesos A y B

- La intersección de ambos sucesos se verifica cuando ocurren ambos a la vez.

Unión e intersección de sucesos

Intersección de dos sucesos

Intersección de dos sucesos A y B

- La intersección de ambos sucesos se verifica cuando ocurren ambos a la vez.
- Se representa como $A \cap B$

Probabilidades de $A \cup B$ y $A \cap B$

Relación entre ambas

Probabilidades de $A \cup B$ y $A \cap B$

- Sea un suceso A con probabilidad $P(A)$

Figuras



$P(A)$

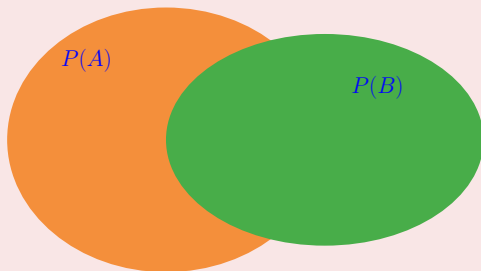
Probabilidades de $A \cup B$ y $A \cap B$

Relación entre ambas

Probabilidades de $A \cup B$ y $A \cap B$

- Sea un suceso A con probabilidad $P(A)$
- Sea un suceso B compatible con A y probabilidad $P(B)$

Figuras



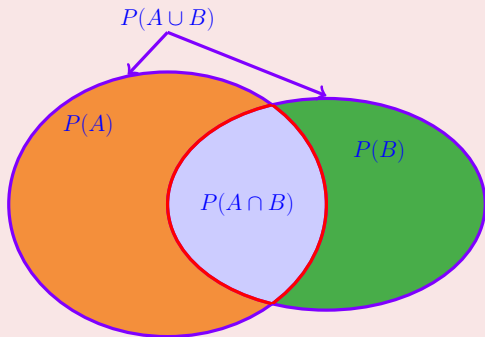
Probabilidades de $A \cup B$ y $A \cap B$

Relación entre ambas

Probabilidades de $A \cup B$ y $A \cap B$

- Sea un suceso A con probabilidad $P(A)$
- Sea un suceso B compatible con A y probabilidad $P(B)$
- Se cumple:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Figuras



Probabilidades de $A \cup B$ y $A \cap B$

Relación entre ambas

Probabilidades de $A \cup B$ y $A \cap B$

- Sea un suceso A con probabilidad $P(A)$
- Sea un suceso B compatible con A y probabilidad $P(B)$

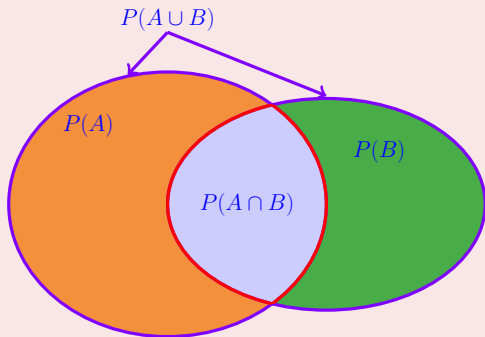
- Se cumple:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Así:

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$$

Figuras



Probabilidad condicionada

Sucesos independientes

Sucesos independientes

- Dos sucesos A y B son independientes si la verificación o no de uno de ellos no afecta de ninguna forma al otro.

Probabilidad condicionada

Sucesos independientes

Sucesos independientes

- Dos sucesos A y B son independientes si la verificación o no de uno de ellos no afecta de ninguna forma al otro.
- A y B independientes $\Leftrightarrow P(A/B) = P(A)$ o $P(B/A) = P(B)$

Probabilidad condicionada

Sucesos independientes

Sucesos independientes

- Dos sucesos A y B son independientes si la verificación o no de uno de ellos no afecta de ninguna forma al otro.
- A y B independientes $\Leftrightarrow P(A/B) = P(A)$ o $P(B/A) = P(B)$
- En tal caso se cumple: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Probabilidad condicionada

Sucesos dependientes

Probabilidad condicionada

- Cálculo de $P(B/A)$

Probabilidad condicionada

Sucesos dependientes

Probabilidad condicionada

- Cálculo de $P(B/A)$
- A y B se verifican si ocurre A y a continuación B tras ocurrir A

Probabilidad condicionada

Sucesos dependientes

Probabilidad condicionada

- Cálculo de $P(B/A)$
- A y B se verifican si ocurre A y a continuación B tras ocurrir A
- Así, se cumple: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$

Probabilidad condicionada

Sucesos dependientes

Probabilidad condicionada

- Cálculo de $P(B/A)$
- A y B se verifican si ocurre A y a continuación B tras ocurrir A
- Así, se cumple: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$

- Despejamos, obteniendo:
$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Probabilidad de B según los resultados de A

- Si los resultados de B dependen de un experimento previo A se cumple:

Probabilidad de B según los resultados de A

- Si los resultados de B dependen de un experimento previo A se cumple:

- $$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

Probabilidad de B según los resultados de A

- Si los resultados de B dependen de un experimento previo A se cumple:

- $$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

Ejemplo

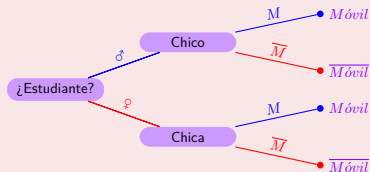
- El 60 % de los chicos tienen móvil, y el 70 % de las chicas también. Si escogemos un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga móvil si en esa clase hay un 40 % de chicos?

Probabilidad de B según los resultados de A

- Si los resultados de B dependen de un experimento previo A se cumple:

- $$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

Figuras



Ejemplo

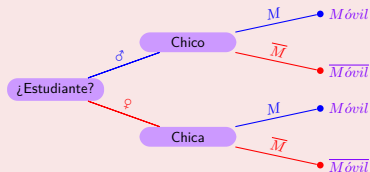
- El 60 % de los chicos tienen móvil, y el 70 % de las chicas también. Si escogemos un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga móvil si en esa clase hay un 40 % de chicos?
- $$P(M) = P(\sigma) \cdot P(M/\sigma) + P(\varphi) \cdot P(M/\varphi)$$

Probabilidad de B según los resultados de A

- Si los resultados de B dependen de un experimento previo A se cumple:

- $$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

Figuras



Ejemplo

- El 60 % de los chicos tienen móvil, y el 70 % de las chicas también. Si escogemos un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga móvil si en esa clase hay un 40 % de chicos?
- $P(M) = P(\sigma) \cdot P(M/\sigma) + P(\varphi) \cdot P(M/\varphi)$
- $P(M) = 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,7 = 0,66$

Probabilidad a posteriori

Fórmula de Bayes

La Fórmula de Bayes

- A partir de la probabilidad condicionada obtenemos:

Probabilidad a posteriori

Fórmula de Bayes

La Fórmula de Bayes

- A partir de la probabilidad condicionada obtenemos:
- $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A)$

Probabilidad a posteriori

Fórmula de Bayes

La Fórmula de Bayes

- A partir de la probabilidad condicionada obtenemos:
- $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A)$
- Despejando obtenemos la Fórmula de Bayes:

Probabilidad a posteriori

Fórmula de Bayes

La Fórmula de Bayes

- A partir de la probabilidad condicionada obtenemos:
- $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A)$
- Despejando obtenemos la Fórmula de Bayes:

$$P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(B)}$$

Ejemplo

- Tenemos una urna A con 7 bolas rojas y 5 azules, y una urna B con 7 bolas azules y 4 rojas. Tiramos un dado: si sale un 1 o un 2, obtenemos bola de la urna A . En caso contrario de la B . Si hemos obtenido una bola roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A ?

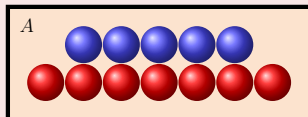
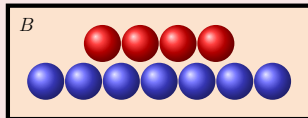
Ejemplo

- Tenemos una urna A con 7 bolas rojas y 5 azules, y una urna B con 7 bolas azules y 4 rojas. Tiramos un dado: si sale un 1 o un 2, obtenemos bola de la urna A . En caso contrario de la B . Si hemos obtenido una bola roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A ?

Solución

$$P(A/R) = \frac{P(A) \cdot P(R/A)}{P(R)}$$

Figuras



Ejemplo

- Tenemos una urna A con 7 bolas rojas y 5 azules, y una urna B con 7 bolas azules y 4 rojas. Tiramos un dado: si sale un 1 o un 2, obtenemos bola de la urna A . En caso contrario de la B . Si hemos obtenido una bola roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A ?

Solución

$$P(A/R) = \frac{P(A) \cdot P(R/A)}{P(R)}$$

$$P(A/R) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{12}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{12} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{11}} = \frac{77}{133}$$

Figuras

