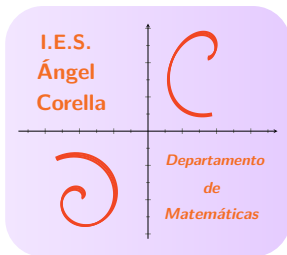


# Geometría euclídea. Distancias en el espacio.

M. Carmen Hurtado

Departamento de Matemáticas. IES Ángel Corella. (Colmenar Viejo)

12 de mayo de 2020



## índice de contenidos I

- 1 Distancia entre dos puntos
- 2 Distancia de un punto a una recta
- 3 Distancia de un punto a un plano
- 4 Distancia entre dos rectas
  - Distancia entre rectas paralelas.
  - Distancia entre dos rectas que se cruzan.
- 5 Distancia entre dos planos



Distancia entre dos puntos

Distancia de un punto a una recta

Distancia de un punto a un plano

Distancia entre dos rectas

Distancia entre dos planos

# Distancia entre dos puntos

## Distancia entre dos puntos

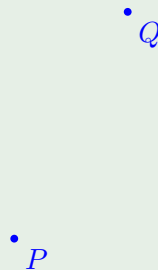


# Distancia entre dos puntos

## Distancia entre dos puntos

- Sean los puntos  $P$  y  $Q$

Figura:  $d(P, Q)$



# Distancia entre dos puntos

## Distancia entre dos puntos

- Sean los puntos  $P$  y  $Q$
- La distancia entre  $P$  y  $Q$  es el módulo del vector  $\vec{PQ}$

Figura:  $d(P, Q)$

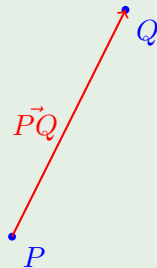


# Distancia entre dos puntos

## Distancia entre dos puntos

- Sean los puntos  $P$  y  $Q$
- La distancia entre  $P$  y  $Q$  es el módulo del vector  $\vec{PQ}$
- $d(P, Q) = |\vec{PQ}|$

Figura:  $d(P, Q)$



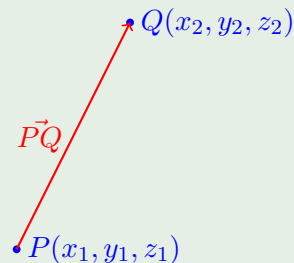
# Distancia entre dos puntos

## Distancia entre dos puntos

- Sean los puntos  $P$  y  $Q$
- La distancia entre  $P$  y  $Q$  es el módulo del vector  $\vec{PQ}$
- $d(P, Q) = |\vec{PQ}|$
- En coordenadas:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Figura:  $d(P, Q)$



## Distancia de un punto a una recta

### Distancia de un punto a una recta



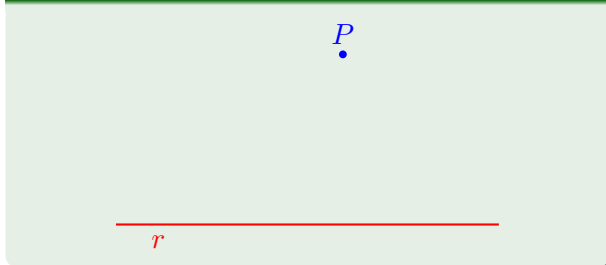


## Distancia de un punto a una recta

### Distancia de un punto a una recta

- Sean el punto  $P$  y la recta  $r$

Figura:  $d(P, r)$

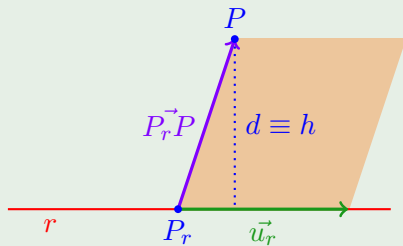


## Distancia de un punto a una recta

### Distancia de un punto a una recta

- Sean el punto  $P$  y la recta  $r$
- La distancia entre  $P$  y  $r$  es la altura del siguiente paralelogramo:

Figura:  $d(P, r)$



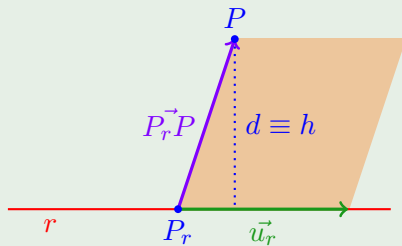
## Distancia de un punto a una recta

### Distancia de un punto a una recta

- Sean el punto  $P$  y la recta  $r$
- La distancia entre  $P$  y  $r$  es la altura del siguiente paralelogramo:

- $$d(P, r) = \frac{\text{Área paralelogramo}}{\text{base}}$$

Figura:  $d(P, r)$



## Distancia de un punto a una recta

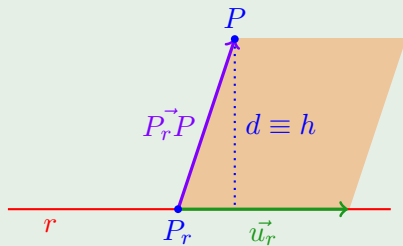
### Distancia de un punto a una recta

- Sean el punto  $P$  y la recta  $r$
- La distancia entre  $P$  y  $r$  es la altura del siguiente paralelogramo:

- $d(P, r) = \frac{\text{Área paralelogramo}}{\text{base}}$

- $d(P, r) = \frac{|\vec{u}_r \times \vec{P_r P}|}{|\vec{u}_r|}$

Figura:  $d(P, r)$



Distancia entre dos puntos  
Distancia de un punto a una recta  
Distancia de un punto a un plano  
Distancia entre dos rectas  
Distancia entre dos planos

## Distancia de un punto a un plano

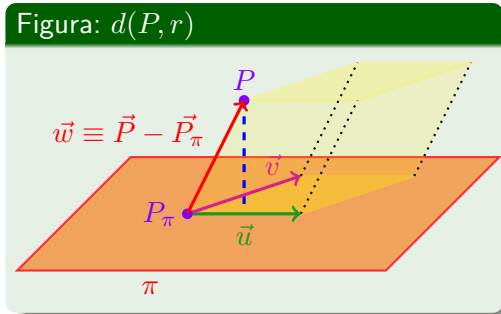
### Distancia de un punto a un plano



## Distancia de un punto a un plano

### Distancia de un punto a un plano

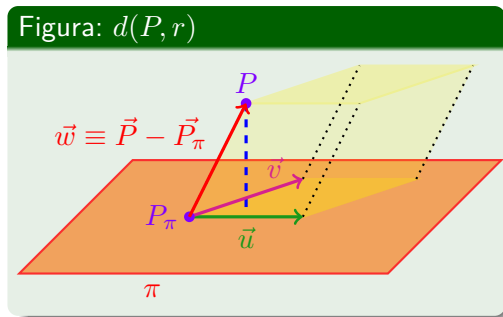
- Sean el punto  $P(p_x, p_y, p_z)$  y el plano  $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$



## Distancia de un punto a un plano

### Distancia de un punto a un plano

- Sean el punto  $P(p_x, p_y, p_z)$  y el plano  $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$
- La distancia de  $P$  a  $\pi$  es la altura del siguiente paralelepípedo:







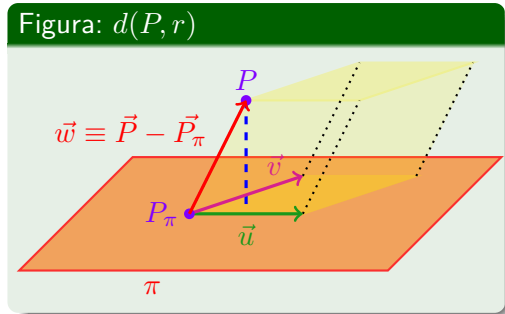
## Distancia de un punto a un plano

### Distancia de un punto a un plano

- Sean el punto  $P(p_x, p_y, p_z)$  y el plano  $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$
- La distancia de  $P$  a  $\pi$  es la altura del siguiente paralelepípedo:

- $$d(P, \pi) = \frac{\text{Volumen paralelepípedo}}{\text{Área de la base}}$$

- $$d(P, \pi) = \frac{|\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$



## Distancia de un punto a un plano

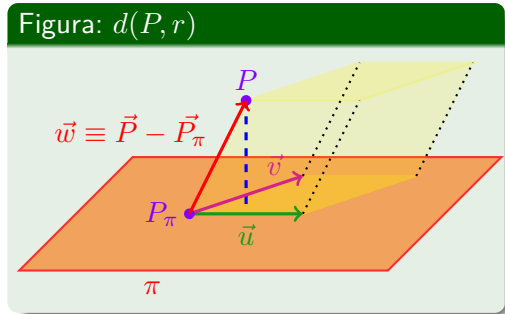
### Distancia de un punto a un plano

- Sean el punto  $P(p_x, p_y, p_z)$  y el plano  $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$
- La distancia de  $P$  a  $\pi$  es la altura del siguiente paralelepípedo:

- $$d(P, \pi) = \frac{\text{Volumen paralelepípedo}}{\text{Área de la base}}$$

- $$d(P, \pi) = \frac{|\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

- $$d(P, \pi) = \frac{|ap_x + bp_y + cp_z + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



# Distancia entre dos rectas paralelas

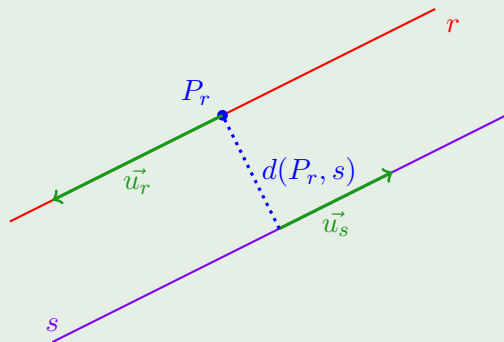
Distancia entre dos rectas paralelas

# Distancia entre dos rectas paralelas

## Distancia entre dos rectas paralelas

- Sean las rectas  $r$  y  $s$ .

## Figura: Distancias rectas paralelas.

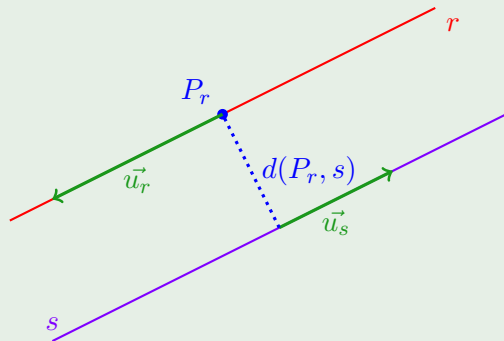


# Distancia entre dos rectas paralelas

## Distancia entre dos rectas paralelas

- Sean las rectas  $r$  y  $s$ .
- La distancia de  $r$  a  $s$  es la distancia entre cualquier punto de  $r$  a  $s$ .

Figura: Distancias rectas paralelas.

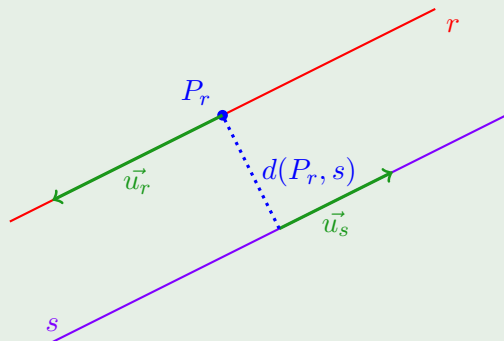


# Distancia entre dos rectas paralelas

## Distancia entre dos rectas paralelas

- Sean las rectas  $r$  y  $s$ .
- La distancia de  $r$  a  $s$  es la distancia entre cualquier punto de  $r$  a  $s$ .
- Basta con hallar  $d(P_r, s)$ , visto en la sección 2

Figura: Distancias rectas paralelas.



# Distancia entre dos rectas que se cruzan

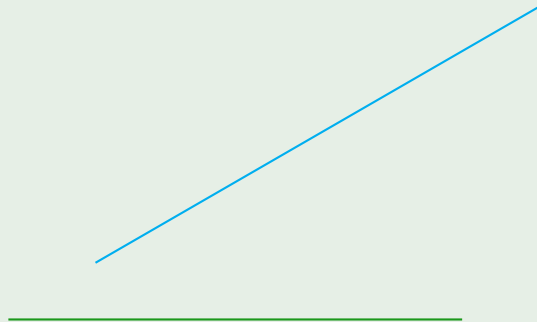
Distancia entre dos rectas que se cruzan.

# Distancia entre dos rectas que se cruzan

Distancia entre dos rectas que se cruzan.

- Sean las rectas  $r$  y  $s$ .

Figura: Distancias entre rectas que se cruzan.



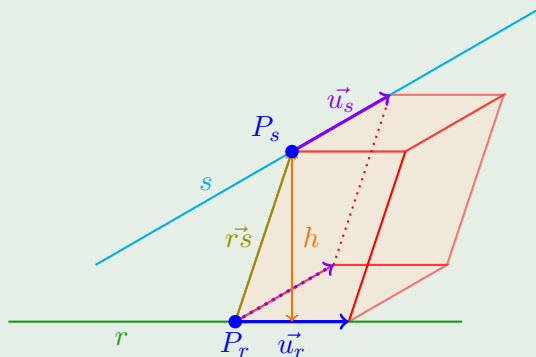


# Distancia entre dos rectas que se cruzan

Distancia entre dos rectas que se cruzan.

- Sean las rectas  $r$  y  $s$ .
- La distancia de  $r$  a  $s$  es la altura  $h$  del paralelepípedo formado por  $(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{r}\vec{s})$

Figura: Distancias entre rectas que se cruzan.

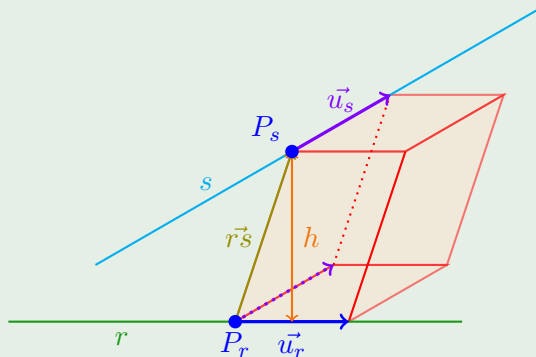


# Distancia entre dos rectas que se cruzan

Distancia entre dos rectas que se cruzan.

- Sean las rectas  $r$  y  $s$ .
- La distancia de  $r$  a  $s$  es la altura  $h$  del paralelepípedo formado por  $(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{r}\vec{s})$
- $$D \equiv h = \frac{V}{A_b} = \frac{|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{r}\vec{s}]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|}$$

Figura: Distancias entre rectas que se cruzan.



# Distancia entre dos rectas que se cruzan

Método alternativo

Distancia entre dos que se cruzan.Método alternativo.

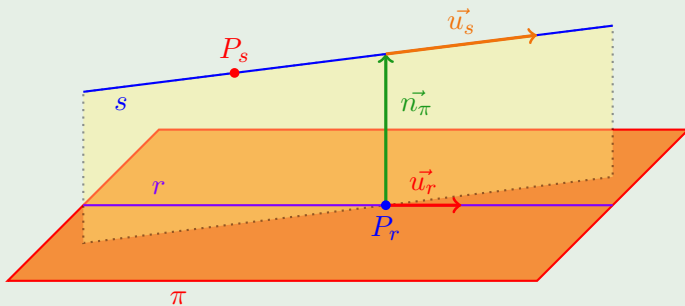
# Distancia entre dos rectas que se cruzan

## Método alternativo

Distancia entre dos que se cruzan. Método alternativo.

- Podemos calcular un plano  $\pi$  que contenga a  $r$  y sea paralelo a  $s$

Figura: Distancias entre rectas que se cruzan.



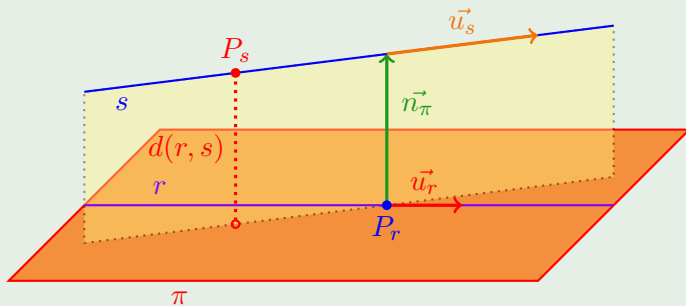
# Distancia entre dos rectas que se cruzan

## Método alternativo

Distancia entre dos que se cruzan. Método alternativo.

- Podemos calcular un plano  $\pi$  que contenga a  $r$  y sea paralelo a  $s$
- La distancia de  $r$  a  $s$  coincide con la distancia de  $P_s$  a  $\pi$ , vista en la sección 3

Figura: Distancias entre rectas que se cruzan.



Distancia entre dos puntos  
Distancia de un punto a una recta  
Distancia de un punto a un plano  
Distancia entre dos rectas  
Distancia entre dos planos

## Distancia entre dos planos

### Distancia entre dos planos paralelos









## Distancia entre dos planos

### Distancia entre dos planos paralelos

- La distancia entre 2 planos es 0 si no son paralelos.
- La distancia de  $\pi$  a  $\sigma$  es la distancia de cualquier punto de  $\pi$  a  $\sigma$ .
- Basta con hallar  $d(P_\pi, \sigma)$ , visto en la sección 3

Figura: Distancias entre planos paralelos.

