EXAMEN DE GRADO MEDIO
MAYO 2023
COMUNIDAD DE MADRID
MATEMÁTICAS

Pelayo Palacio Pérez

****

EJERCICIO 1

EJERCICIO 1

Si un arquitecto necesita contratar a 27 obreros para hacer la reforma de una casa en 16 días,

a) Calcule el número de días que necesitaría para realizar la misma reforma con 18 obreros (**1 punto**).

b) Calcule el número de obreros que necesitaría si solo dispusiera de 9 días para acometer la obra (**1 punto**).

a) Calcule el número de días que necesitaría para realizar la misma reforma con 18 obreros.

Este es un típico problema de proporcionalidad. En este caso es proporcionalidad inversa pues cuantos menos obreros trabajen, más tiempo necesitamos para acometer la tarea. Podemos resolverlo como sigue:

1) 27 obreros $\longrightarrow$ 16 días, entonces 27:27 = 1 obrero $\longrightarrow 16 \cdot 27 = 432$ días y, por último,

   $1 \cdot 18 = 18$ obreros $\longrightarrow 432 : 18 = 24$ días.

- Solución: tardarán 24 días.

2)
$$\begin{cases} 27 \text{ obreros} \longrightarrow 16 \text{ días} \\ 18 \text{ obreros} \longrightarrow x \text{ días} \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{16 \text{ días} \cdot 27 \text{ obreros}}{18 \text{ obreros}} = 24 \text{ días.}$$

- Solución: tardarán 24 días.

Nota: hay más métodos para resolver este tipo de problemas, pero estos dos son los principales.

b) Calcule el número de obreros que necesitaría si solo dispusiera de 9 días para acometer la obra.

Este es un típico problema de proporcionalidad. En este caso es proporcionalidad inversa pues a cuantos menos días tenga para realizar la obra, más obreros necesitaremos para hacer la tarea. Podemos resolverlo como sigue:

1) 27 obreros $\longrightarrow$ 16 días, entonces $16 : 16 = 1$ día $\longrightarrow 27 \cdot 16 = 432$ obreros, y por último, $1 \cdot 9 = 9$ días $\longrightarrow 432 : 9 = 54$ obreros.

- Solución: necesitaríamos 54 obreros.

2) $$\begin{cases} 27 \text{ obreros} \longrightarrow 16 \text{ días} \\ x \text{ obreros} \longrightarrow 9 \text{ días} \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{27 \text{ obreros} \cdot 16 \text{ días}}{9 \text{ días}} = 54 \text{ obreros}.$$

- Solución: hubiésemos necesitado 54 obreros.

Nota: hay más métodos para resolver este tipo de problemas, pero estos dos son los principales.

****

EJERCICIO 2

EJERCICIO 2

El precio medio por metro cuadrado de una vivienda de nueva construcción era, a principio de 2022, de 2732 €. Si a lo largo de 2002 dicho precio medio se ha encarecido un 7.1 %,

a) Calcule a cuánto habrá ascendido el nuevo precio por metro cuadrado (**1 punto**).

b) Calcule el precio medio de una vivienda de nueva construcción de 95m^2, antes y después de la subida (**1 punto**).

a) Calcule a cuánto habrá ascendido el nuevo precio por metro cuadrado.

Lo primero es observar que si el precio aumenta un 7,1 %, el precio final tiene un incremento del $100 + 7,1 = 107,1\,\%$. Veamos dos caminos: uno sumando el incremento dado y otro usando que los porcentajes se engloban en la proporcionalidad directa.

1) Incremento: $x\,€ = \dfrac{2732 \cdot 7,1}{100} = 193,972\,€$ de incremento

   Sumando: $2732 + 193,972 = 2925,972$

- Solución: el nuevo precio por metro cuadrado es de $2925,97\,€$.

2) Proporcionalidad directa: $\begin{cases} 2732€ \longrightarrow 100\,\% \\ x€ \longrightarrow 107,1\,\% \end{cases} \Longrightarrow$

   $\Longrightarrow x\,€ = \dfrac{2732 \cdot 107,1}{100} = 2925,972 = 2925,97\,€$

- Solución: el nuevo precio por metro cuadrado es de $2925,97\,€$.

b) Calcule el precio medio de una vivienda de nueva construcción de $95m^2$, antes y después de la subida.

Para resolver este apartado multiplicamos los metros cuadrados de la vivienda por el precio del metro cuadrado en cada contexto:

- Antes de la subida: $95 \times 2732 = 259540$
- Después de la subida: $95 \times 2925,97 = 277967,15$

- Solución: el precio antes de la subida sería de 259.540 € y después de la subida de 277.967,15 €.

****

EJERCICIO 3

EJERCICIO 3

En una escuela de música se ofertan plazas de piano y violín. La tabla adjunta muestra las matrículas de los alumnos según su elección de instrumento y nivel de estudios.

	Nivel 1	Nivel 2
Violín	25	28
Piano	18	14

a) Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar curse piano (**0,5 puntos**).

b) Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar curse piano o esté en el nivel 2 (**0,5 puntos**).

c) Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar curse violín y esté en el nivel 1 (**0,5 puntos**).

d) Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar no curse violín y no esté en el nivel 2 (**0,5 puntos**).

a) Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar curse piano.

- Puesto que nos dan la tabla, vamos a responder a las preguntas sin más que contar los alumnos de los cuadrados correspondientes.
- Usamos la definición de probabilidad según la regla de Laplace:

  $P(\text{Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar curse piano}) = \dfrac{\text{casos a favor}}{\text{total de casos}} =$

  $= \dfrac{18+14}{25+28+18+14} = \dfrac{32}{85} \approx 0,3765 = 37,65\,\%$

- Solución: la probabilidad pedida es de $\dfrac{32}{85}$ o de $0,3765$ o del $37,65\,\%$.

b) Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar curse piano o esté en el nivel 2.

- Usamos la definición de probabilidad según la regla de Laplace (recordemos que la conjunción "o/u" indica que "o bien está en uno o bien está en el otro o bien en ambos"):

  P(Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar curse piano o esté en el nivel 2) $= \dfrac{\text{casos a favor}}{\text{total de casos}} =$

  $$= \frac{18+14+28}{25+28+18+14} = \frac{60}{85} = \frac{12}{17} \approx 0,7059 = 70,59\,\%$$

- Solución: la probabilidad pedida es de $\dfrac{60}{85}$ o de $\dfrac{12}{17}$ o de $0,7059$ o del $70,59\,\%$.

c) Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar curse violín y esté en el nivel 1.

- Usamos la definición de probabilidad según la regla de Laplace (recordemos que la conjunción "y/e" indica que "está en uno y también está en el otro"):

  P(Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar curse violín y esté en el nivel 1) $= \dfrac{\text{casos a favor}}{\text{total de casos}} =$

  $$= \frac{25}{25+28+18+14} = \frac{25}{85} = \frac{5}{17} \approx 0,2941 = 29,41\,\%$$

- Solución: la probabilidad pedida es de $\dfrac{25}{85}$ o de $\dfrac{5}{17}$ o de $0,2941$ o del $29,41\,\%$.

d) Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar no curse violín y no esté en el nivel 2.

- Usamos la definición de probabilidad según la regla de Laplace.
- En este caso "no curse violín" = todos los alumnos que no están en violín (sólo en piano) y los que "no esté en el nivel dos" = alumnos que no están están en ese nivel (sólo en el nivel uno). Juntamos ambas condiciones: "alumnos que están en piano **y** en el nivel uno" y la solución está clara:

  P(Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar no curse violín y no esté en el nivel 2) $= \dfrac{\text{casos a favor}}{\text{total de casos}} =$

  $$= \frac{18}{25+28+18+14} = \frac{18}{85} \approx 0,2117 = 21,17\,\%$$

- Solución: la probabilidad pedida es de $\dfrac{18}{85}$ o de $0,2171$ o del $21,17\,\%$.

****

EJERCICIO 4

EJERCICIO 4

He comprado un pantalón y dos camisas por 75 €. Calcule el precio de un pantalón y el precio de una camisa, sabiendo que un pantalón cuesta 15 € más que una camisa (**2 puntos**).

Calcule el precio de un pantalón y el precio de una camisa.

Este en un problema de sistemas de ecuaciones lineales. Vamos a tener dos incógnitas, el dinero que cuesta un pantalón y el dinero que cuesta una camisa así que necesitaremos dos ecuaciones.

La primera nos dice que el 1 pantalón más 2 camisas ($1\times$ pantalón $+$ $2\times$ camisa) valen 75.

Para la segunda usaremos que la diferencia de precio entre un pantalón y una camisa es de 15 euros con el pantalón siendo la prenda más cara de las dos (pantalón $-$ camisa $=$ 15).

Llamando $x =$ dinero que cuesta un pantalón e $y =$ dinero que cuesta una camisa:

$$\left.\begin{array}{c} \overbrace{x + 2y = 75}^{\text{ecuación relativa a la primera frase}} \\ \underbrace{x - y = 15}_{\text{ecuación relativa a la segunda frase}} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Calcule el precio de un pantalón y el precio de una camisa.

Ya tenemos el sistema en la forma habitual así que procedemos a resolverlo por el método, por ejemplo, de reducción sumando la segunda ecuación multiplicada por dos con la primera para hacer desaparecer la variable **y**.

- $x + 2y + 2x - 2y = 75 + 30 \Longrightarrow 3x = 105 \Longrightarrow x = \dfrac{105}{3} = 35$
- Sustituyendo el valor de "x" en cualquiera de las ecuaciones hallamos la otra incógnita. Si elegimos la segunda:
  $x - y = 15 \Longrightarrow 35 - y = 15 \Longrightarrow y = 20$
- <u>Solución:</u> Un pantalón vale 35 € y una camisa vale 20 €.

****

EJERCICIO 5

EJERCICIO 5

Resuelva de forma razonada la siguiente ecuación de segundo grado:

$$(x+1)^2 - 2(x+3)(x-3) = 20 \text{ } (\textbf{2 puntos})$$

Resuelva de forma razonada la siguiente ecuación de segundo grado:
$(x+1)^2 - 2(x+3)(x-3) = 20$

Esta es una ecuación en principio de segundo grado pero primero hay que operar y agrupar todo en uno de los miembros:

- Para operar nos damos cuenta de que $(x+1)^2$ es el cuadrado de una suma y $(x-2)(x+2)$ es suma por diferencia cuyo resultado es diferencia de cuadrados:
- $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$; $(x+3)(x-3) = x^2 - 9$, con lo que obtenemos: $(x+1)^2 - 2(x+3)(x-3) = 20 \iff x^2 + 2x + 1 - 2(x^2 - 9) = 20 \iff$ $\iff x^2 + 2x + 1 - 2x^2 + 18 = 20 \iff -x^2 + 2x + 19 = 20$
- Agrupamos todo en el primer miembro y para que el coeficiente de x^2 sea positivo multiplicamos toda la ecuación por (-1):
  $-x^2 + 2x + 19 = 20 \iff -x^2 + 2x - 1 = 0 \iff x^2 - 2x + 1 = 0$. Aquí podemos ya observar que tenemos una identidad notable ($(x-1)^2 = 0$ con solución única $x = 1$) o, si no,usar la fórmula para las ecuaciones de segundo grado completas con $a = 1$, $b = -2$ y $c = 1$

Resuelva de forma razonada la siguiente ecuación de segundo grado:
$(x+1)^2 - 2(x+3)(x-3) = 20$

- $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \dfrac{2 \pm \sqrt{0}}{2} =$

$$= \frac{2 \pm 0}{2} \Longrightarrow \begin{cases} \oplus : x_1 = \dfrac{2+0}{2} = 1 \\ \ominus : x_2 = \dfrac{2-0}{2} = 1 \end{cases}$$

- Solución: la (única) solución a la ecuación es $x = 1$.