Solución a los problemas 6 y 10 enviados a los alumnos de 2 de Bachillerato A del I. E. S. Mateo Alemán de Alcalá de Henares, para el viernes 27-03-20.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Ejercicio 6. Un empresa fabrica pantallas de ordenador, cuya resolución sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 22 píxeles. Para una muestra de 196 pantallas, se obtiene el intervalo de confianza (1276.34, 1283.66). Halla la resolución media de estas pantallas y el nivel de confianza con el que se ha obtenido..

Solución:

Sea X la variable aleatoria:

$$X = \text{“Resolución de las pantallas de ordenador”}$$

X sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 22$. Esto se expresa matemáticamente como:

$$X \sim N(\mu, 22)$$

La expresión de un intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

En nuestro caso nos dan el intervalo:

$$(1276.34, \qquad 1283.66)$$

- $n = 196$ (que es el número de pantallas, el tamaño muestral)
- $\sigma = 22$ (que es la desviación típica)

Del intervalo sabemos:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1276.34$$
$$\bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1283.66$$

Sustituimos los datos conocidos:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{22}{\sqrt{196}} = 1276.34$$
$$\bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{22}{\sqrt{196}} = 1283.66$$

es decir:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{22}{14} = 1276.34$$
$$\bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{22}{14} = 1283.66$$

Podemos formar un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{22}{14} = 1276.34 \\ \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{22}{14} = 1283.66 \end{array}\right\}$$

y como $\frac{22}{14} = 1.571429$ tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} \bar{x} - 1.571429 \cdot z_{\frac{\alpha}{2}} = 1276.34 \\ \bar{x} + 1.571429 \cdot z_{\frac{\alpha}{2}} = 1283.66 \end{array}\right\}$$

(las dos incógnitas son: $\bar{x}$ y $z_{\frac{\alpha}{2}}$)

Lo resolvemos por reducción. Si sumamos las dos ecuaciones obtenemos $\bar{x}$:

$$2 \cdot \bar{x} = 2560$$

$$\bar{x} = \frac{2560}{2} = 1280 \text{ píxeles}$$

que es la resolución media de las pantallas que nos piden.

Restando obtenemos $z_{\frac{\alpha}{2}}$ (porque $-1.571429 - 1.571429 = -3.142857$):

$$-3.142857 \cdot z_{\frac{\alpha}{2}} = -7.32$$

luego

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{-7.32}{-3.142857}$$

Así:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.329 \approx 2.33$$

Como

$$P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

en nuestro caso

$$P(Z \leq 2.33) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Buscamos en la tabla y obtenemos:

$$0.9901 = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

operando:

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - 0.9901$$

De aquí sacamos α:

$$\alpha = 2 \cdot (1 - 0.9901) = 0.0198 \approx 0.02$$

Luego la significación α es del 2% y la confianza $1 - \alpha$ es del 98%.

Ejercicio 10. La dureza media de cierto plástico se distribuye normalmente. Para estimar la dureza media, se toma una muestra de tamaño 49 y con un nivel de confianza del 99% se sabe que está entre 7.372 y 7.428. ¿Cuál es la dureza media de estas 49 muestras? ¿Cuánto vale la desviación típica poblacional?.

Solución:

Sea X la variable aleatoria:

$$X = \text{“Dureza de cierto plástico”}$$

X sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica σ. Esto se expresa matemáticamente como:

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

La expresión de un intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

En nuestro caso nos dan el intervalo:

$$(7.372, \qquad 7.428)$$

- $n = 49$ (el tamaño muestral)
- $1 - \alpha = 0.99$. Luego $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$

Del intervalo sabemos:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7.372$$
$$\bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7.428$$

Sustituimos los datos conocidos:

$$\bar{x} - 2.575 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{49}} = 7.372$$
$$\bar{x} + 2.575 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{49}} = 7.428$$

es decir:

$$\bar{x} - 2.575 \cdot \frac{\sigma}{7} = 7.372$$
$$\bar{x} + 2.575 \cdot \frac{\sigma}{7} = 7.428$$

como $\dfrac{2.575}{7} = 0.3678571$ podemos formar un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} \bar{x} - 0.3678571 \cdot \sigma = 7.372 \\ \bar{x} + 0.3678571 \cdot \sigma = 7.428 \end{array}\right\}$$

Sumando obtenemos $\bar{x}$:

$$2 \cdot \bar{x} = 14.8$$

de donde

$$\bar{x} = 7.4$$

que es la dureza media.

Como $-0.3678571 - 0.3678571 = -0.7357142$, restando obtenemos σ:

$$-0.7357142 \cdot \sigma = -0.056$$

y

$$\sigma = \frac{-0.056}{-0.7357142} = 0.07611651 \approx 0.08$$

Carlos Hermoso Ortiz