

Cuerpos geométricos

David Matellano

Departamento de matemáticas. IES Ángel Corella. (Colmenar Viejo)

24 de abril de 2017



índice de contenidos I

- 1 Definición de poliedro
 - Clasificación de los poliedros
 - Cóncavo-convexo
 - Regulares-irregulares
- 2 Poliedros regulares
 - Tetraedro
 - Cubo
 - Octaedro
 - Dodecaedro
 - Icosaedro
 - Resumen de los poliedros regulares
- 3 Relación de Euler
- 4 Principio de Cavallieri

índice de contenidos II

- 5 Prismas
 - Desarrollo de un prisma recto
 - Área de un prisma recto
 - Volumen de un prisma

- 6 Pirámides
 - Tipos de pirámides
 - Elementos de una pirámide regular.
 - Desarrollo de una pirámide
 - Área de una pirámide
 - Volumen de una pirámide

- 7 Cuerpos de revolución
 - El cilindro
 - Desarrollo de un cilindro

índice de contenidos III

- Área de un cilindro
- Volumen de un cilindro
- El cono
 - Tipos de conos
 - Desarrollo de un cono recto
 - Área de un cono recto
 - Volumen de un cono
- La esfera
 - Definición.
 - Área y volumen de una esfera:

8 Troncos

- Tronco de pirámide
 - Área y volumen de un tronco de pirámide
- Tronco de cono
 - Área y volumen de un tronco de cono

Definición de poliedro

Poliedro

Definición de poliedro

Poliedro

- Es un cuerpo cerrado delimitado por polígonos.

Definición de poliedro

Poliedro

- Es un cuerpo cerrado delimitado por polígonos.
 - 1 Cada uno de los polígonos que lo forman son caras.

Definición de poliedro

Poliedro

- Es un cuerpo cerrado delimitado por polígonos.
 - ① Cada uno de los polígonos que lo forman son caras.
 - ② Los lados de dichos polígonos se llaman aristas.

Definición de poliedro

Poliedro

- Es un cuerpo cerrado delimitado por polígonos.
 - 1 Cada uno de los polígonos que lo forman son caras.
 - 2 Los lados de dichos polígonos se llaman aristas.
 - 3 Los puntos de concurrencia de las aristas reciben el nombre de vértices.

Clasificación de los poliedros

Concavidad y convexidad

Poliedro cóncavo o convexo

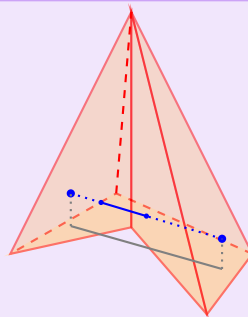
Clasificación de los poliedros

Concavidad y convexidad

Poliedro cóncavo o convexo

- 1 **Cóncavo:** \Rightarrow Un segmento entre dos puntos puede salir del poliedro.

poliedros cóncavo-convexo



Poliedros regulares

Definición

¿Qué es un poliedro regular?

Poliedros regulares

Definición

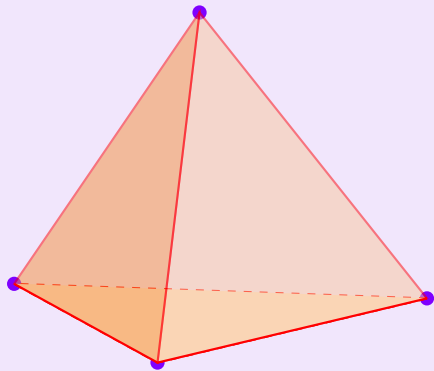
¿Qué es un poliedro regular?

- Es aquel formado exclusivamente por polígonos regulares iguales y en cuyos vértices concurren siempre el mismo número de aristas.
- Si no es regular, se dice irregular.
- Solamente hay cinco poliedros regulares.

El tetraedro

Poliedro formado por 4 triángulos equiláteros

Tetraedro

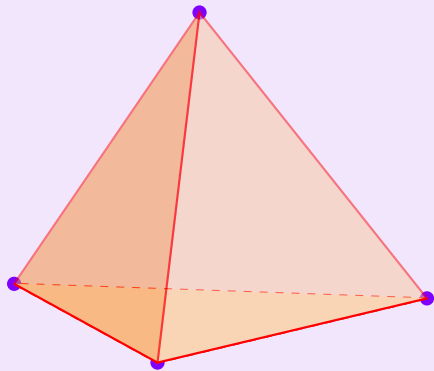


Caras, aristas y vértices:

El tetraedro

Poliedro formado por 4 triángulos equiláteros

Tetraedro



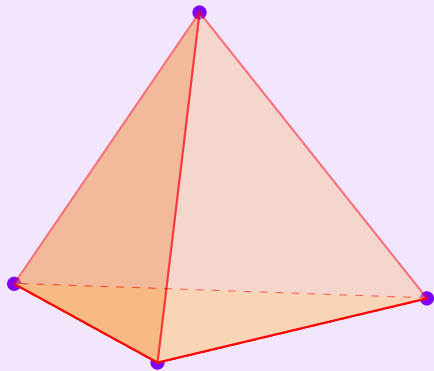
Caras, aristas y vértices:

4 Caras

El tetraedro

Poliedro formado por 4 triángulos equiláteros

Tetraedro



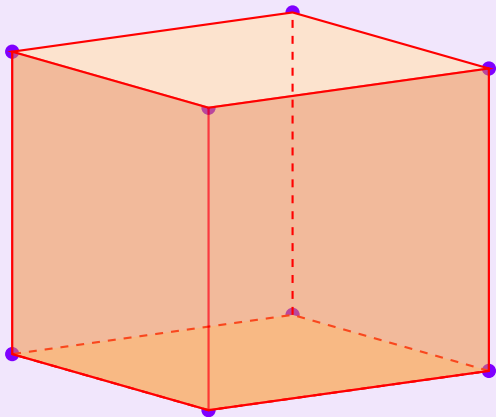
Caras, aristas y vértices:

- 1 4 Caras
- 2 6 Aristas
- 3 4 **Vértices**

El hexaedro o cubo

Poliedro formado por 6 cuadrados.

Cubo o hexaedro

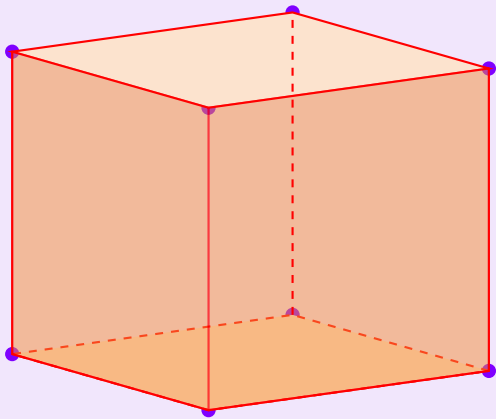


Caras, aristas y vértices:

El hexaedro o cubo

Poliedro formado por 6 cuadrados.

Cubo o hexaedro



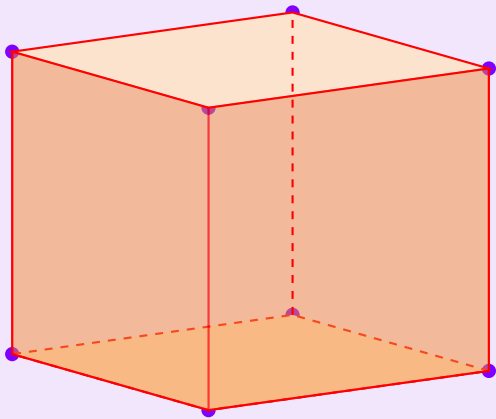
Caras, aristas y vértices:

1 6 Caras

El hexaedro o cubo

Poliedro formado por 6 cuadrados.

Cubo o hexaedro



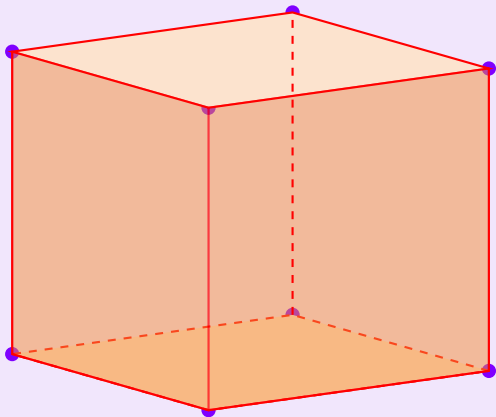
Caras, aristas y vértices:

- 1 6 Caras
- 2 12 Aristas

El hexaedro o cubo

Poliedro formado por 6 cuadrados.

Cubo o hexaedro



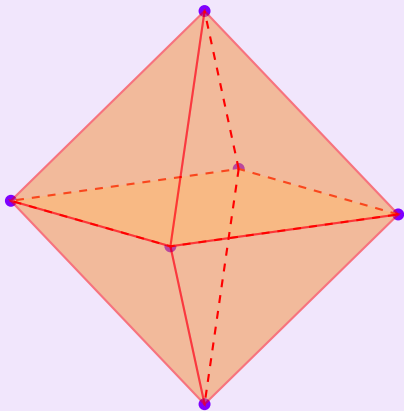
Caras, aristas y vértices:

- 1 6 Caras
- 2 12 Aristas
- 3 8 Vértices

El octaedro

Poliedro formado por 8 triángulos equiláteros

Octaedro

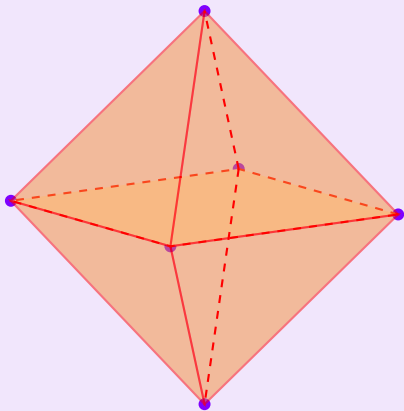


Caras, aristas y vértices:

El octaedro

Poliedro formado por 8 triángulos equiláteros

Octaedro



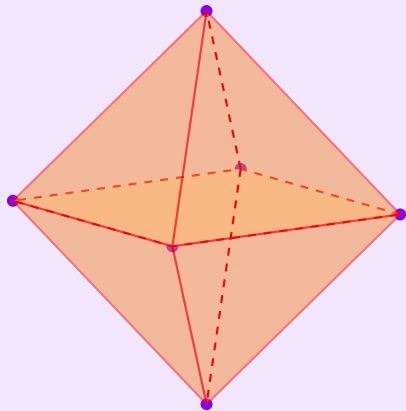
Caras, aristas y vértices:

1 8 Caras

El octaedro

Poliedro formado por 8 triángulos equiláteros

Octaedro



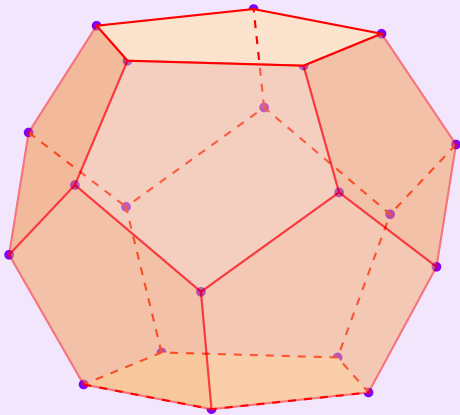
Caras, aristas y vértices:

- 1 8 Caras
- 2 12 Aristas
- 3 6 Vértices

El dodecaedro

Poliedro formado por 12 pentágonos regulares

Dodecaedro

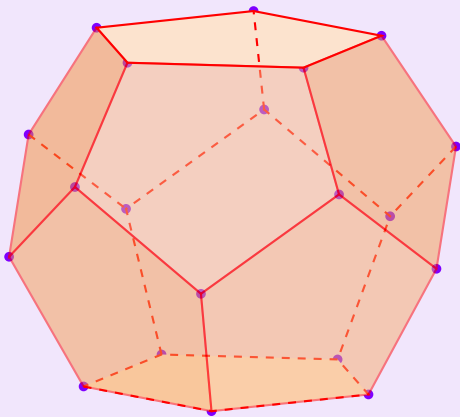


Caras, aristas y vértices:

El dodecaedro

Poliedro formado por 12 pentágonos regulares

Dodecaedro



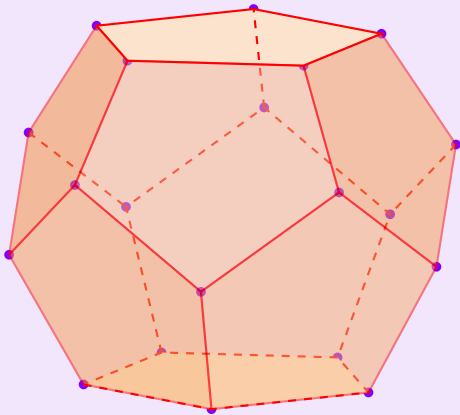
Caras, aristas y vértices:

1 12 Caras

El dodecaedro

Poliedro formado por 12 pentágonos regulares

Dodecaedro



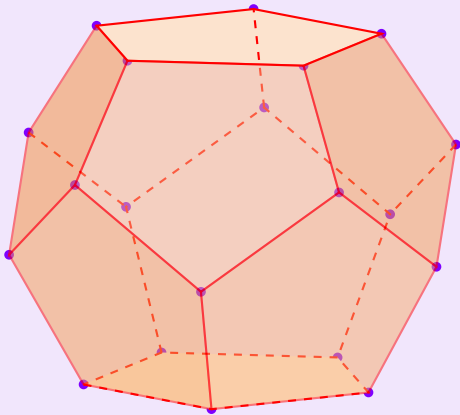
Caras, aristas y vértices:

- 1 12 Caras
- 2 30 Aristas

El dodecaedro

Poliedro formado por 12 pentágonos regulares

Dodecaedro



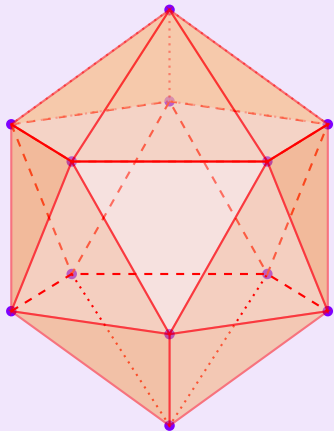
Caras, aristas y vértices:

- ① 12 Caras
- ② 30 Aristas
- ③ 20 Vértices

El Icosaedro

Poliedro formado por 20 triángulos equiláteros

Icosaedro

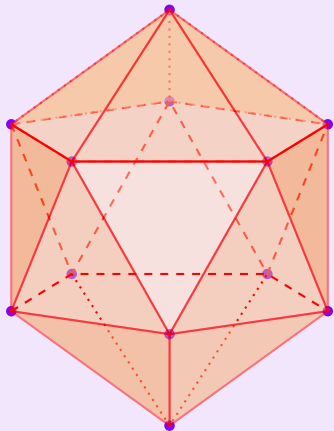


Caras, aristas y vértices:

El Icosaedro

Poliedro formado por 20 triángulos equiláteros

Icosaedro



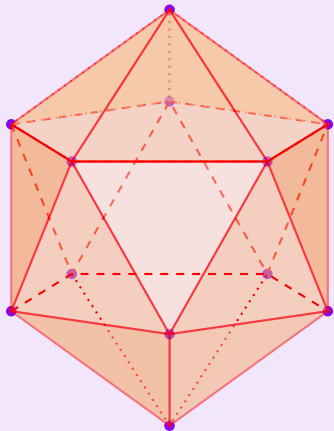
Caras, aristas y vértices:

1 20 Caras

El Icosaedro

Poliedro formado por 20 triángulos equiláteros

Icosaedro



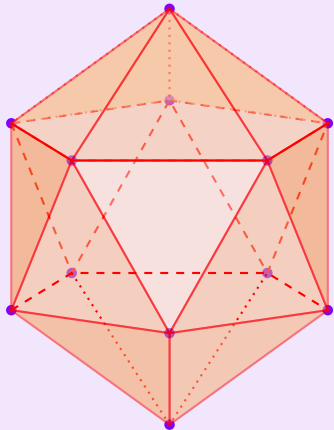
Caras, aristas y vértices:

- 1 20 Caras
- 2 30 Aristas

El Icosaedro

Poliedro formado por 20 triángulos equiláteros

Icosaedro



Caras, aristas y vértices:

- 1 20 Caras
- 2 30 Aristas
- 3 12 Vértices

Resumen de los poliedros regulares

Tabla con sus características

Poliedros regulares:

Poliedro	Caras	N.º de caras	Vértices	Aristas
Tetraedro	Triángulos	4	4	6
Cubo	Cuadrados	6	8	12
Octaedro	Triángulos	8	6	12
Dodecaedro	Pentágonos	12	20	30
Icosaedro	Triángulos	20	12	30

Tabla 1: Poliedros regulares o sólidos platónicos.

La relación de Euler

Caras, vértices y aristas en un poliedro

Relación de euler

La relación de Euler

Caras, vértices y aristas en un poliedro

Relación de euler

- En un poliedro convexo, (ver 2), el número de caras, vertices y aristas cumple:

La relación de Euler

Caras, vértices y aristas en un poliedro

Relación de euler

- En un poliedro convexo, (ver 2), el número de caras, vertices y aristas cumple:
- $C + V = A + 2$

La relación de Euler

Caras, vértices y aristas en un poliedro

Relación de euler

- En un poliedro convexo, (ver 2), el número de caras, vertices y aristas cumple:
- $C + V = A + 2$
- Podemos comprobarlo en la tabla 1 :

El principio de Cavalieri

Enunciado por Bonaventura Cavalieri en el S XVII

Enunciado

El principio de Cavalieri

Enunciado por Bonaventura Cavalieri en el S XVII

Enunciado

- Si dos cuerpos poseen la misma altura y además tienen igual área en sus secciones planas realizadas a alturas iguales, poseen entonces igual volumen.

Consecuencias para el cálculo de volúmenes:

El principio de Cavalieri

Enunciado por Bonaventura Cavalieri en el S XVII

Enunciado

- Si dos cuerpos poseen la misma altura y además tienen igual área en sus secciones planas realizadas a alturas iguales, poseen entonces igual volumen.

Consecuencias para el cálculo de volúmenes:

- Si en un cuerpo todas las secciones planas realizadas a cualquier altura son de igual área, el volumen de dicho cuerpo será el producto del área de su base por su altura.

Prismas

Definición y clasificación

Definición

Prismas

Definición y clasificación

Definición

- Poliedro formado por dos polígonos iguales y paralelos llamados bases y unidos por sus caras laterales.

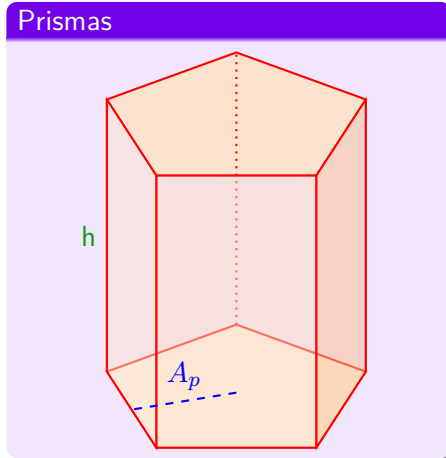
Prismas

Prismas

Definición y clasificación

Definición

- Poliedro formado por dos polígonos iguales y paralelos llamados bases y unidos por sus caras laterales.
 - 1 Si una base está sobre la otra, es un **prisma recto**. Las caras laterales son rectángulos.

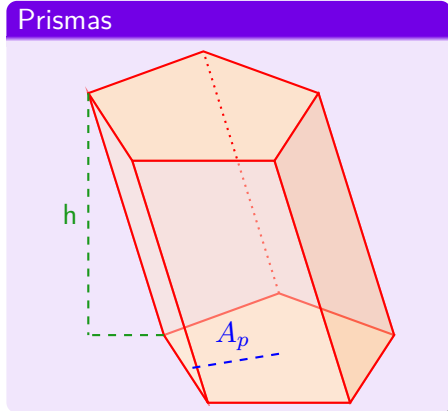


Prismas

Definición y clasificación

Definición

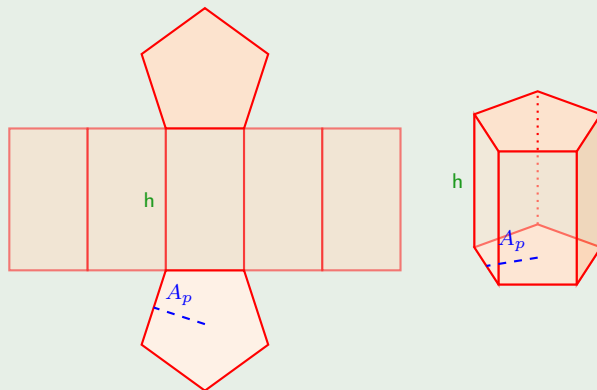
- Poliedro formado por dos polígonos iguales y paralelos llamados bases y unidos por sus caras laterales.
 - 1 Si una base está sobre la otra, es un **prisma recto**. Las caras laterales son rectángulos.
 - 2 Si se desplaza una de las bases, es un **prisma oblicuo**. Las caras laterales son rectángulos y paralelogramos.



Desarrollo de un prisma recto

Construcción del prisma a partir de los polígonos que lo forman

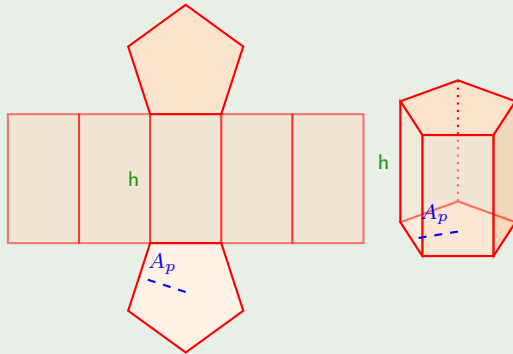
Un ejemplo:



Área de un prisma

Cálculo del área de un prisma recto

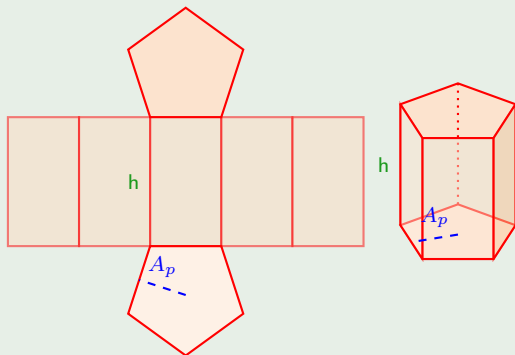
A partir del desarrollo concluimos:



Área de un prisma

Cálculo del área de un prisma recto

A partir del desarrollo concluimos:

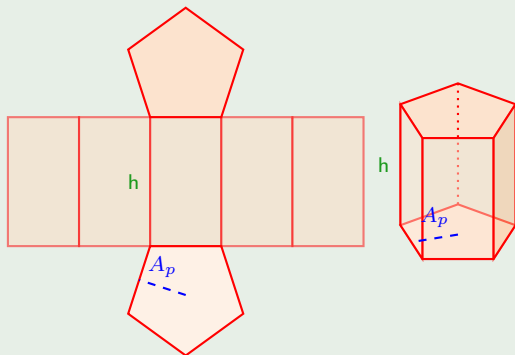


$$1 \quad A = 2 \cdot A_b + A_l$$

Área de un prisma

Cálculo del área de un prisma recto

A partir del desarrollo concluimos:



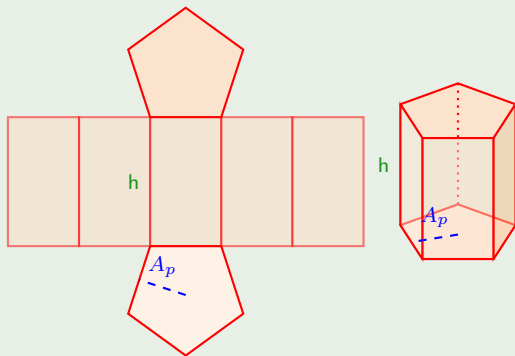
① $A = 2 \cdot A_b + A_l$

② A_b : Depende de su forma

Área de un prisma

Cálculo del área de un prisma recto

A partir del desarrollo concluimos:



- 1 $A = 2 \cdot A_b + A_l$
- 2 A_b : Depende de su forma
- 3 $A_l = P_b \cdot h$

Volumen de un prisma

Cálculo en prismas rectos y oblicuos

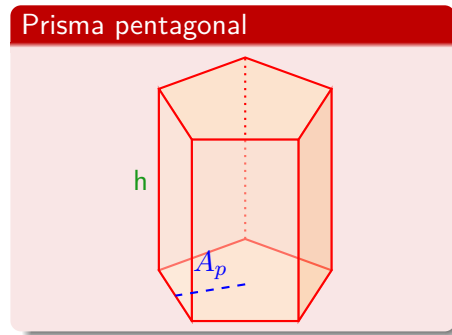
Como consecuencia del principio de Cavalieri (15)

Volumen de un prisma

Cálculo en prismas rectos y oblicuos

Como consecuencia del principio de Cavalieri (15)

- 1 $V = A_b \cdot h$
- 2 Es válido para cualquier prisma.



Definición de pirámide

Tipos de pirámides

Definición de pirámide

Definición de pirámide

Tipos de pirámides

Definición de pirámide

- Es un poliedro formado por un polígono llamado base y caras triangulares, que concurren en un punto llamado vértice.

Tipos de pirámides

Definición de pirámide

Tipos de pirámides

Definición de pirámide

Tipos de pirámides

- 1 Recta u oblicua:

Definición de pirámide

Tipos de pirámides

Definición de pirámide

Tipos de pirámides

1 Recta u oblicua:

- Recta: Ninguna cara lateral es un triángulo escaleno.

Definición de pirámide

Tipos de pirámides

- 1 Recta u oblicua:
 - Recta: Ninguna cara lateral es un triángulo escaleno.
 - Oblicua: No es recta. Hay triángulos escalenos.

Definición de pirámide

Tipos de pirámides

Definición de pirámide

Tipos de pirámides

- 1 Recta u oblicua:
 - Recta: Ninguna cara lateral es un triángulo escaleno.
 - Oblicua: No es recta. Hay triángulos escalenos.
- 2 Regular o irregular.

Definición de pirámide

Tipos de pirámides

- 1 Recta u oblicua:
 - Recta: Ninguna cara lateral es un triángulo escaleno.
 - Oblicua: No es recta. Hay triángulos escalenos.
- 2 Regular o irregular.
 - Regular. La base es un polígono regular y la pirámide es recta.

Definición de pirámide

Tipos de pirámides

Definición de pirámide

Tipos de pirámides

- 1 Recta u oblicua:
 - Recta: Ninguna cara lateral es un triángulo escaleno.
 - Oblicua: No es recta. Hay triángulos escalenos.
- 2 Regular o irregular.
 - Regular. La base es un polígono regular y la pirámide es recta.
 - Irregular. No es regular

Definición de pirámide

Tipos de pirámides

- 1 Recta u oblicua:
 - Recta: Ninguna cara lateral es un triángulo escaleno.
 - Oblicua: No es recta. Hay triángulos escalenos.
- 2 Regular o irregular.
 - Regular. La base es un polígono regular y la pirámide es recta.
 - Irregular. No es regular
- 3 **Cóncava o convexa:**

Definición de pirámide

Tipos de pirámides

- 1 Recta u oblicua:
 - Recta: Ninguna cara lateral es un triángulo escaleno.
 - Oblicua: No es recta. Hay triángulos escalenos.
- 2 Regular o irregular.
 - Regular. La base es un polígono regular y la pirámide es recta.
 - Irregular. No es regular
- 3 Cóncava o convexa:
 - **Cóncava: La base es un polígono cóncavo.**

Definición de pirámide

Tipos de pirámides

- 1 Recta u oblicua:
 - Recta: Ninguna cara lateral es un triángulo escaleno.
 - Oblicua: No es recta. Hay triángulos escalenos.
- 2 Regular o irregular.
 - Regular. La base es un polígono regular y la pirámide es recta.
 - Irregular. No es regular
- 3 Cóncava o convexa:
 - Cóncava: La base es un polígono cóncavo.
 - **Convexa: La base es un polígono convexo. Ver (2)**

Elementos una pirámide regular.

Apotemas y altura

Definiciones

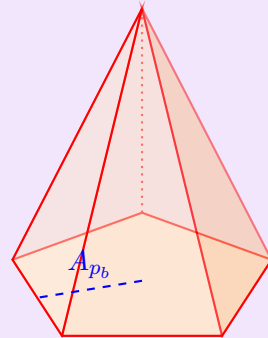
Elementos una pirámide regular.

Apotemas y altura

Definiciones

- 1 Apotema básica. Es la apotema de la base (si tiene)

pirámide pentagonal regular



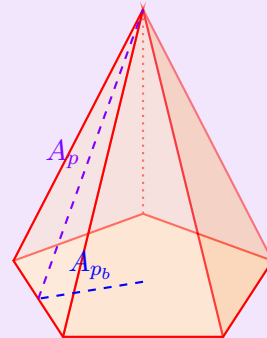
Elementos una pirámide regular.

Apotemas y altura

Definiciones

- 1 Apotema básica. Es la apotema de la base (si tiene)
- 2 Apotema lateral. Altura de caras laterales.

pirámide pentagonal regular



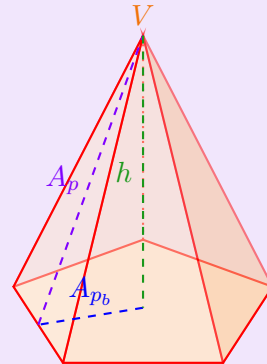
Elementos una pirámide regular.

Apotemas y altura

Definiciones

- 1 Apotema básica. Es la apotema de la base (si tiene)
- 2 Apotema lateral. Altura de caras laterales.
- 3 **Altura. Es la distancia base-vértice**

pirámide pentagonal regular



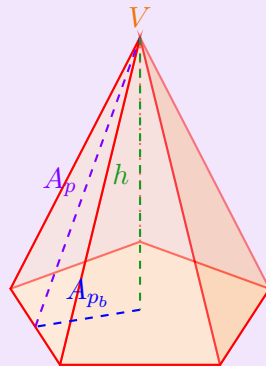
Elementos una pirámide regular.

Apotemas y altura

Definiciones

- 1 Apotema básica. Es la apotema de la base (si tiene)
- 2 Apotema lateral. Altura de caras laterales.
- 3 Altura. Es la distancia base-vértice
- 4 Las tres forman un triángulo rectángulo.

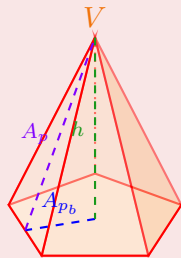
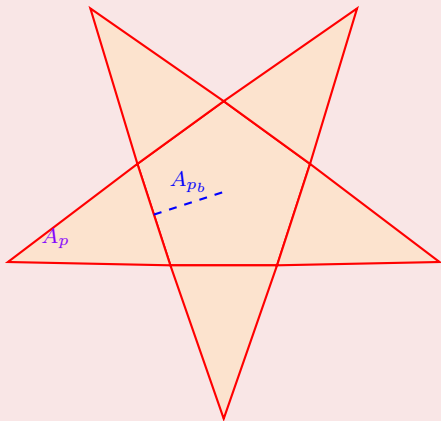
pirámide pentagonal regular



Desarrollo de una pirámide

Ejemplo de desarrollo de una pirámide pentagonal regular

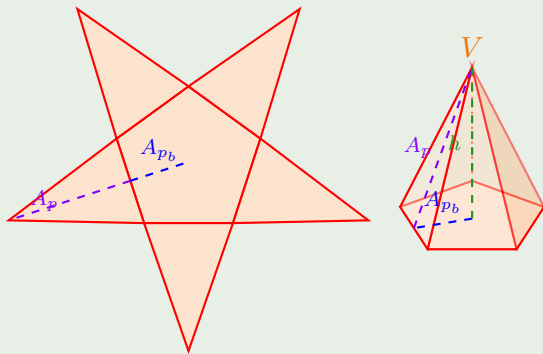
Desarrollo



Cálculo del área de una pirámide regular

A partir de su desarrollo obtenemos:

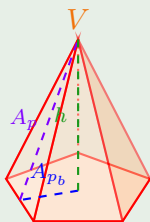
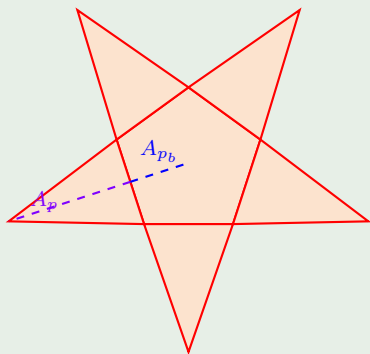
Área de una pirámide regular



Cálculo del área de una pirámide regular

A partir de su desarrollo obtenemos:

Área de una pirámide regular

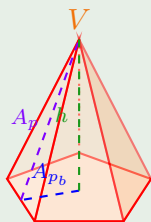
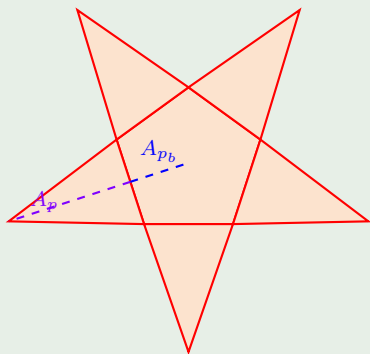


$$\textcircled{1} A = A_b + A_l$$

Cálculo del área de una pirámide regular

A partir de su desarrollo obtenemos:

Área de una pirámide regular



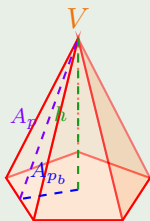
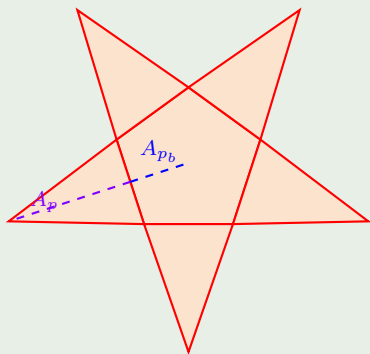
① $A = A_b + A_l$

② A_b : Depende de su forma

Cálculo del área de una pirámide regular

A partir de su desarrollo obtenemos:

Área de una pirámide regular



- 1 $A = A_b + A_l$
- 2 A_b : Depende de su forma
- 3 $A_l = \frac{P_b \cdot A_p}{2}$

Volumen de una pirámide

Sea una pirámide cualquiera:

Su volumen será:

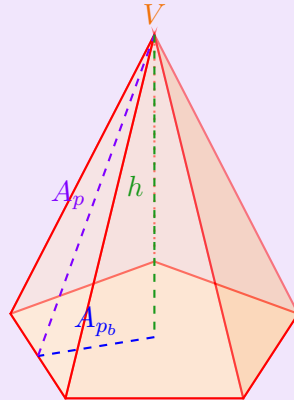
Volumen de una pirámide

Sea una pirámide cualquiera:

Su volumen será:

$$1 \quad V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

Pirámide



Volumen de una pirámide

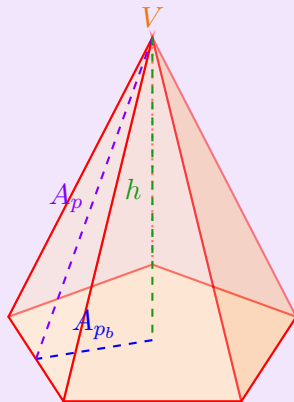
Sea una pirámide cualquiera:

Su volumen será:

$$① \quad V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

② es la tercera parte del volumen de un prisma de iguales dimensiones.

Pirámide



Cuerpos de revolución

Definición

Sólido de revolución

Cuerpos de revolución

Definición

Sólido de revolución

- Es el sólido obtenido al rotar una figura plana alrededor de un eje llamado *eje de revolución*.

Ejemplo:

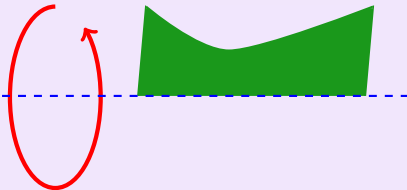
Cuerpos de revolución

Definición

Sólido de revolución

- Es el sólido obtenido al rotar una figura plana alrededor de un eje llamado *eje de revolución*.

Ejemplo:



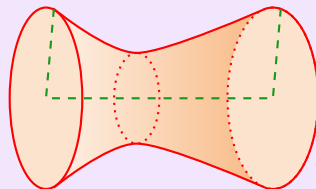
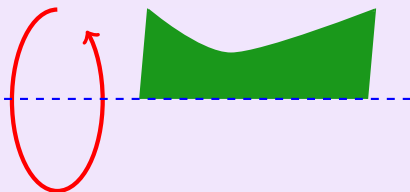
Cuerpos de revolución

Definición

Sólido de revolución

- Es el sólido obtenido al rotar una figura plana alrededor de un eje llamado *eje de revolución*.

Ejemplo:



El cilindro

Definición y elementos

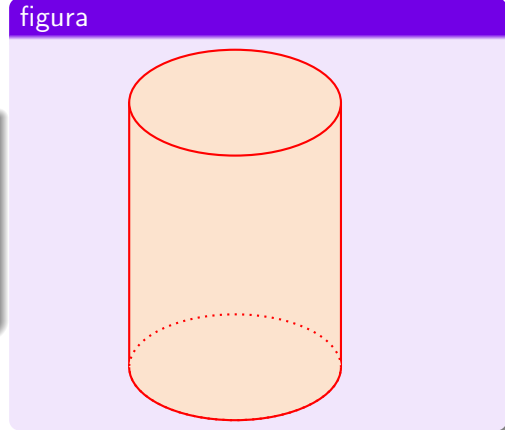
El cilindro:

El cilindro

Definición y elementos

El cilindro:

- 1 Sólido de revolución obtenido al rotar un rectángulo 360° alrededor de uno de sus lados.

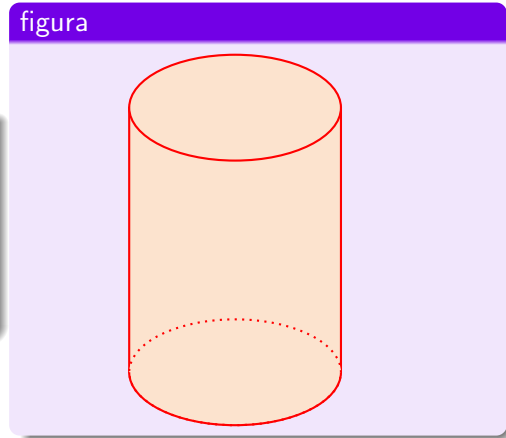


El cilindro

Definición y elementos

El cilindro:

- 1 Sólido de revolución obtenido al rotar un rectángulo 360° alrededor de uno de sus lados.
- 2 **Elementos:**

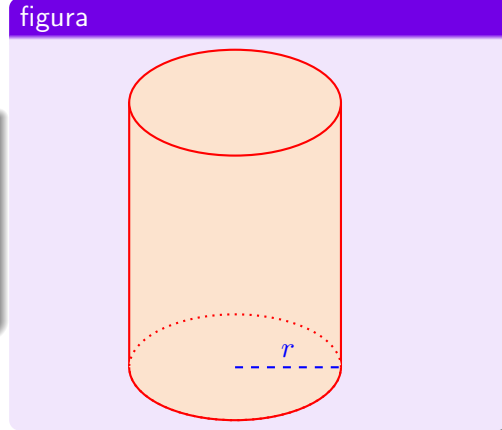


El cilindro

Definición y elementos

El cilindro:

- 1 Sólido de revolución obtenido al rotar un rectángulo 360° alrededor de uno de sus lados.
- 2 Elementos:
 - Radio (r)

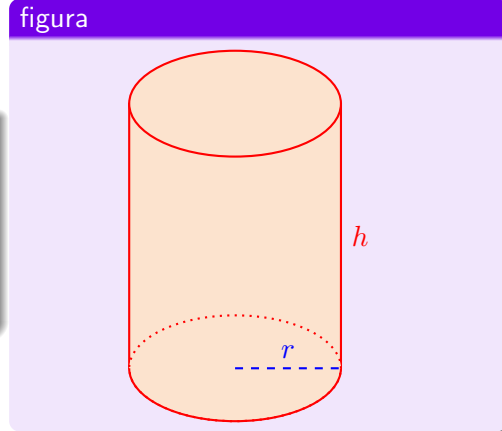


El cilindro

Definición y elementos

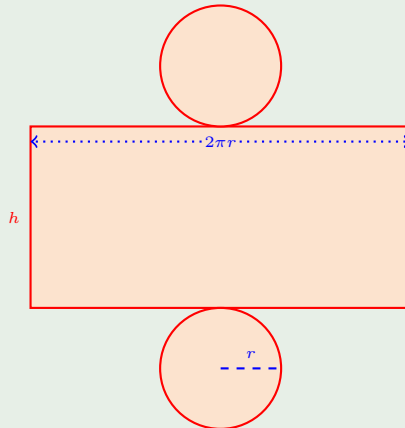
El cilindro:

- 1 Sólido de revolución obtenido al rotar un rectángulo 360° alrededor de uno de sus lados.
- 2 Elementos:
 - Radio (r)
 - **Altura (h)**



Desarrollo de un cilindro

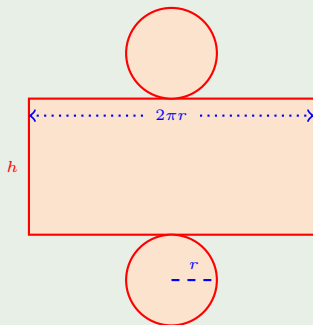
Desarrollo a partir de sus medidas



Área de un cilindro

Cálculo a partir de su desarrollo

Desarrollo de un cilindro

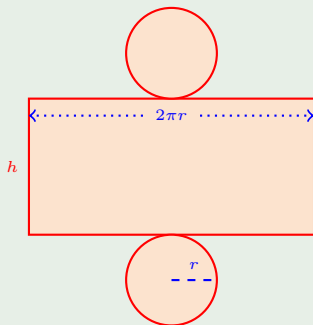


Área:

Área de un cilindro

Cálculo a partir de su desarrollo

Desarrollo de un cilindro



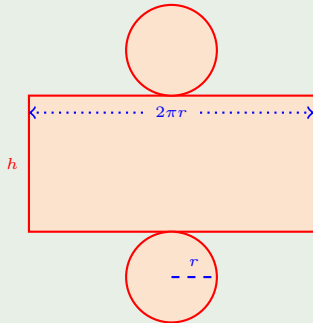
Área:

$$A = 2 \cdot A_b + A_l$$

Área de un cilindro

Cálculo a partir de su desarrollo

Desarrollo de un cilindro



Área:

- 1 $A = 2 \cdot A_b + A_l$
- 2 $A_b = \pi \cdot r^2$

Volumen de un cilindro

Cálculo a partir de sus dimensiones

Como consecuencia del principio
de Cavalieri (15)

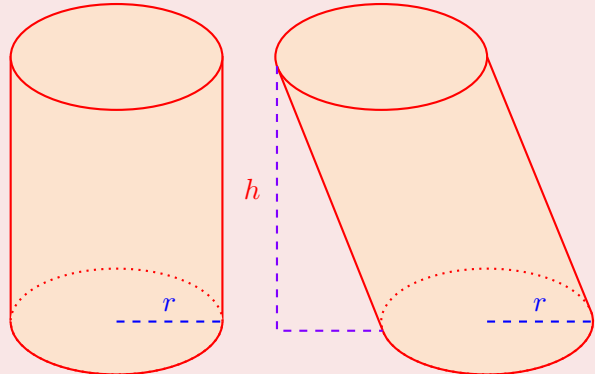
Volumen de un cilindro

Cálculo a partir de sus dimensiones

Como consecuencia del principio de Cavalieri (15)

- 1 $V = A_b \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$
- 2 Es válido para cualquier cilindro.

Cilindros



Definición

Tipos de conos

Definición de cono recto

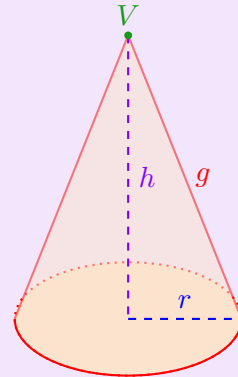
Definición

Tipos de conos

Definición de cono recto

- Cuerpo geométrico obtenido al rotar 360° un triángulo rectángulo alrededor de un cateto.

Figuras:



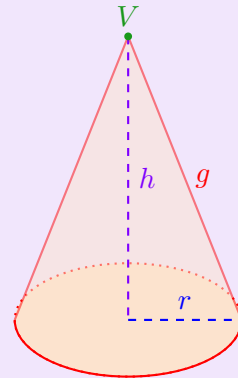
Definición

Tipos de conos

Definición de cono recto

- Cuerpo geométrico obtenido al rotar 360° un triángulo rectángulo alrededor de un cateto.
- **Elementos del cono:**

Figuras:



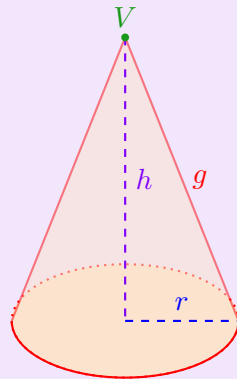
Definición

Tipos de conos

Definición de cono recto

- Cuerpo geométrico obtenido al rotar 360° un triángulo rectángulo alrededor de un cateto.
- Elementos del cono:
 - Radio (r)

Figuras:



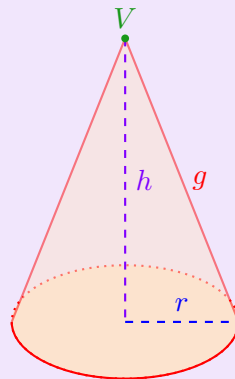
Definición

Tipos de conos

Definición de cono recto

- Cuerpo geométrico obtenido al rotar 360° un triángulo rectángulo alrededor de un cateto.
- Elementos del cono:
 - Radio (r)
 - **Altura (h)**

Figuras:



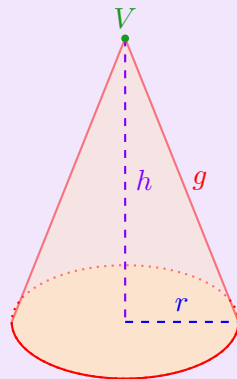
Definición

Tipos de conos

Definición de cono recto

- Cuerpo geométrico obtenido al rotar 360° un triángulo rectángulo alrededor de un cateto.
- Elementos del cono:
 - Radio (r)
 - Altura (h)
 - **Generatriz (g)**

Figuras:



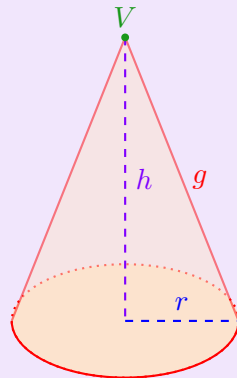
Definición

Tipos de conos

Definición de cono recto

- Cuerpo geométrico obtenido al rotar 360° un triángulo rectángulo alrededor de un cateto.
- Elementos del cono:
 - Radio (r)
 - Altura (h)
 - Generatriz (g)
 - $g^2 = r^2 + h^2$

Figuras:



Definición

Tipos de conos

Definición de cono oblicuo

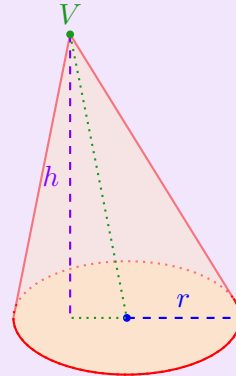
Definición

Tipos de conos

Definición de cono oblicuo

- Cono cuyo eje de revolución no es perpendicular a su base. Esta puede ser circular o elíptica.

Figuras:



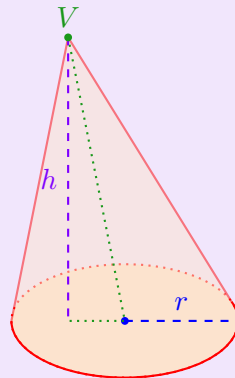
Definición

Tipos de conos

Definición de cono oblicuo

- Cono cuyo eje de revolución no es perpendicular a su base. Esta puede ser circular o elíptica.
- **Elementos del cono oblicuo:**

Figuras:



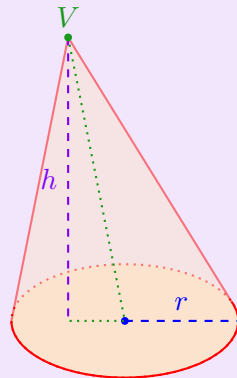
Definición

Tipos de conos

Definición de cono oblicuo

- Cono cuyo eje de revolución no es perpendicular a su base. Esta puede ser circular o elíptica.
- Elementos del cono oblicuo:
 - Radio (r) o semiejes de la elipse a , b

Figuras:



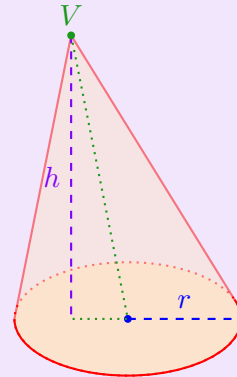
Definición

Tipos de conos

Definición de cono oblicuo

- Cono cuyo eje de revolución no es perpendicular a su base. Esta puede ser circular o elíptica.
- Elementos del cono oblicuo:
 - Radio (r) o semiejes de la elipse a , b
 - **Altura (h)**

Figuras:



Desarrollo de un cono recto

Obtención a partir de sus elementos:

Elementos del desarrollo

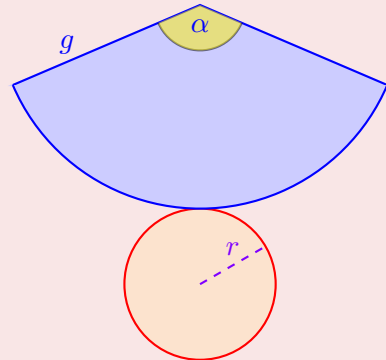
Desarrollo de un cono recto

Obtención a partir de sus elementos:

Elementos del desarrollo

- 1 Radio y generatriz. (r y h)

Desarrollo



Área de un cono recto

Obtención a partir de su desarrollo

Área de un cono:

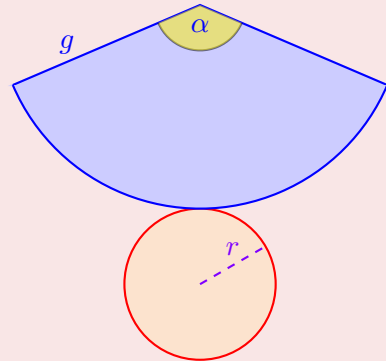
Área de un cono recto

Obtención a partir de su desarrollo

Área de un cono:

- 1 $A = A_b + A_l$
- 2 $A_b = \pi \cdot r^2$

Desarrollo



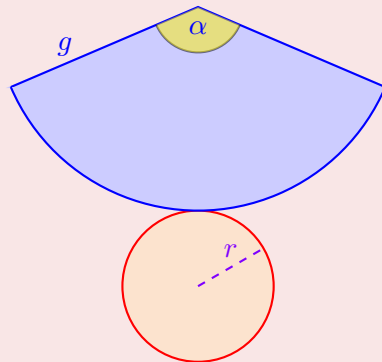
Área de un cono recto

Obtención a partir de su desarrollo

Área de un cono:

- 1 $A = A_b + A_l$
- 2 $A_b = \pi \cdot r^2$
- 3 $A_l = \pi \cdot r \cdot g$

Desarrollo



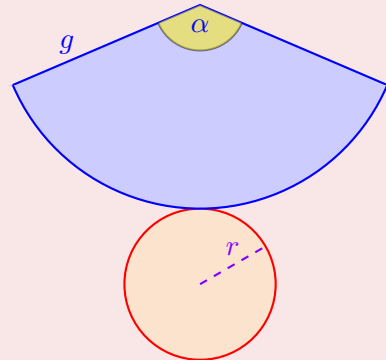
Área de un cono recto

Obtención a partir de su desarrollo

Área de un cono:

- 1 $A = A_b + A_l$
- 2 $A_b = \pi \cdot r^2$
- 3 $A_l = \pi \cdot r \cdot g$
- 4 $A = \pi \cdot r \cdot (r + g)$

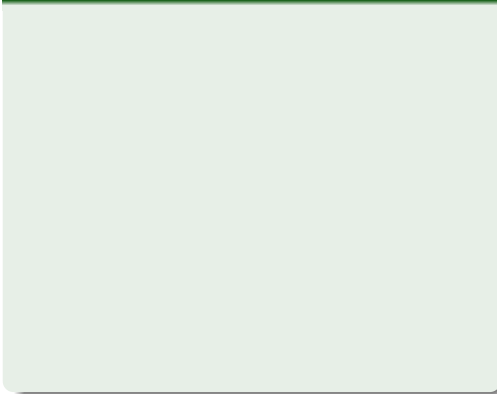
Desarrollo



Volumen de un cono

Obtención a partir de sus elementos

Volumen del cono:



Volumen de un cono

Obtención a partir de sus elementos

Volumen del cono:

① Para cualquier cono: $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

Figuras:

Volumen de un cono

Obtención a partir de sus elementos

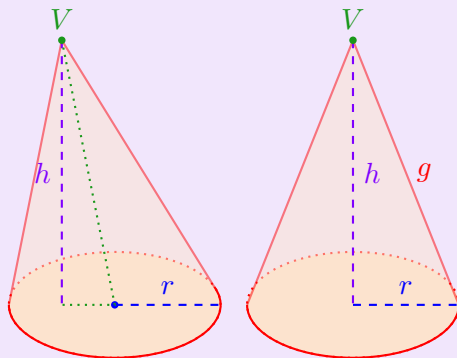
Volumen del cono:

1 Para cualquier cono: $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

2 Si la base es circular:

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

Figuras:



Volumen de un cono

Obtención a partir de sus elementos

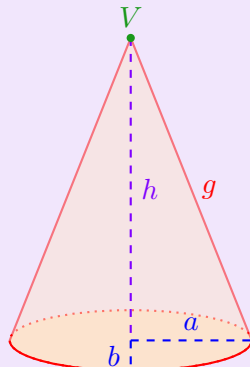
Volumen del cono:

① Para cualquier cono: $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

② Si la base es circular:
 $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$

③ Si la base es elíptica:
 $V = \frac{\pi \cdot a \cdot b \cdot h}{3}$

Figuras:



Volumen de un cono

Obtención a partir de sus elementos

Volumen del cono:

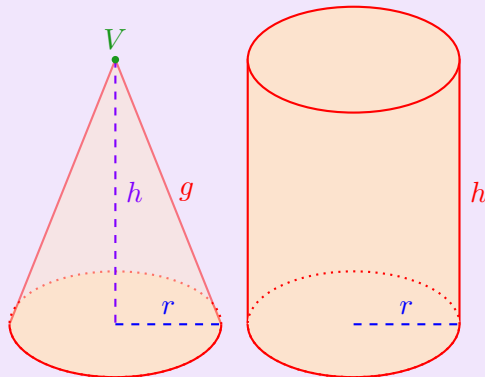
1 Para cualquier cono: $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

2 Si la base es circular:
 $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$

3 Si la base es elíptica:
 $V = \frac{\pi \cdot a \cdot b \cdot h}{3}$

4 Es la tercera parte del volumen de un cilindro de dimensiones iguales.

Figuras:



Definición de esfera como sólido de revolución.

Elementos

La esfera:

Área y volumen de una esfera:

Cálculo:

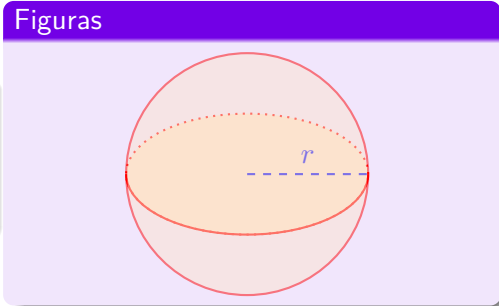
Área y volumen.

Área y volumen de una esfera:

Cálculo:

Área y volumen.

- $A = 4\pi \cdot r^2$



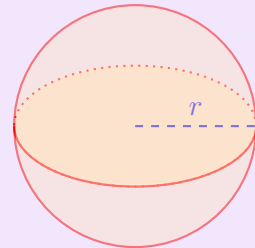
Área y volumen de una esfera:

Cálculo:

Área y volumen.

- $A = 4\pi \cdot r^2$
- $V = \frac{4\pi \cdot r^3}{3}$

Figuras



Tronco de pirámide

Definición

Obtención de un tronco de pirámide

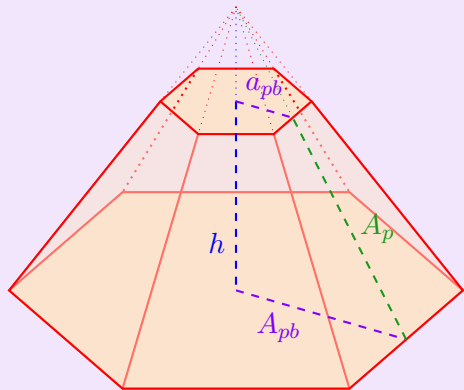
Tronco de pirámide

Definición

Obtención de un tronco de pirámide

- Es el poliedro obtenido al truncar una pirámide con un plano paralelo a su base.

Figuras



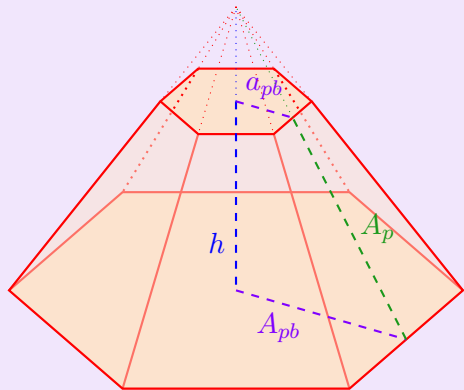
Tronco de pirámide

Definición

Obtención de un tronco de pirámide

- Es el poliedro obtenido al truncar una pirámide con un plano paralelo a su base.
- **Consta de :**

Figuras



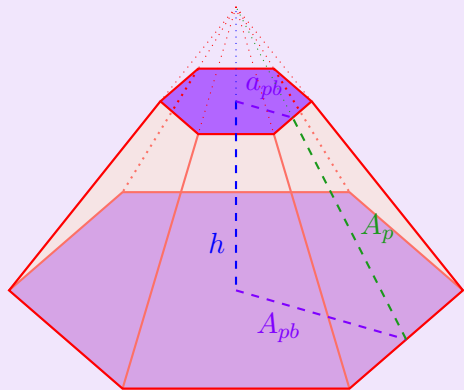
Tronco de pirámide

Definición

Obtención de un tronco de pirámide

- Es el poliedro obtenido al truncar una pirámide con un plano paralelo a su base.
- Consta de :
 - Bases mayor y menor

Figuras



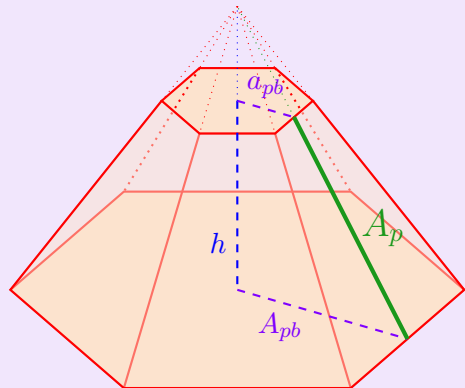
Tronco de pirámide

Definición

Obtención de un tronco de pirámide

- Es el poliedro obtenido al truncar una pirámide con un plano paralelo a su base.
- Consta de :
 - Bases mayor y menor
 - Altura
 - **Apotema**

Figuras



Tronco de pirámide

Desarrollo

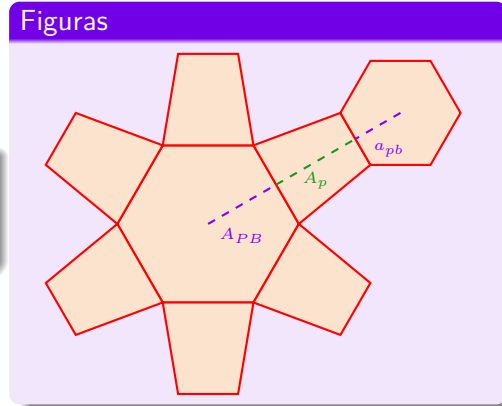
Desarrollo de un tronco de pirámide

Tronco de pirámide

Desarrollo

Desarrollo de un tronco de pirámide

- Obtenemos 2 polígonos semejantes (Bases)



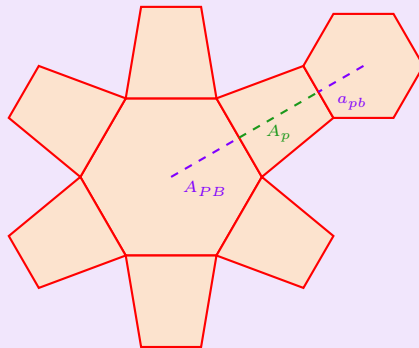
Tronco de pirámide

Desarrollo

Desarrollo de un tronco de pirámide

- Obtenemos 2 polígonos semejantes (Bases)
- Las caras laterales son trapecios

Figuras



Área y volumen de un tronco de pirámide

Obtención a partir de sus elementos

Área de un tronco de pirámide:

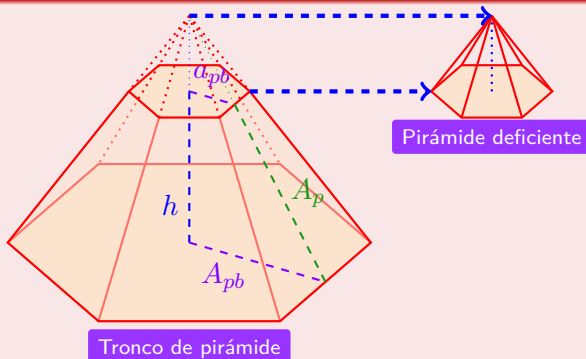
Área y volumen de un tronco de pirámide

Obtención a partir de sus elementos

Área de un tronco de pirámide:

$$A = A_B + a_b + \frac{P_B + p_b}{2} \cdot A_p$$

Tronco de pirámide y pirámide deficiente



Área y volumen de un tronco de pirámide

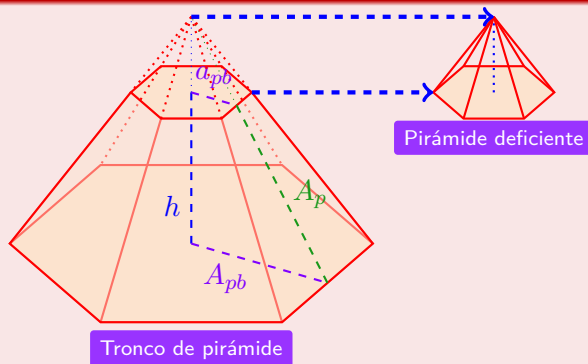
Obtención a partir de sus elementos

Área de un tronco de pirámide:

①
$$A = A_B + a_b + \frac{P_B + p_b}{2} \cdot A_p$$

- ② Se puede obtener por Tales conociendo las dimensiones de la pirámide original y la pirámide deficiente.

Tronco de pirámide y pirámide deficiente



Área y volumen de un tronco de pirámide

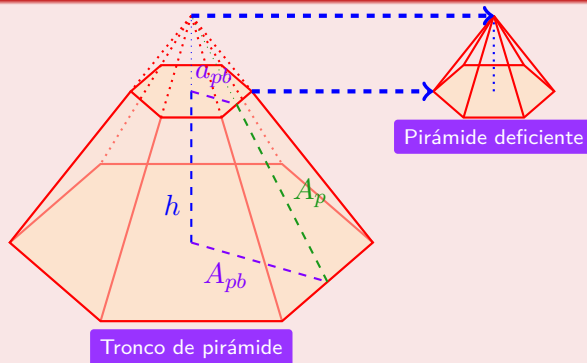
Obtención a partir de sus elementos

Volumen de un tronco de pirámide:

$$① \quad V = \frac{A_B + a_b + \sqrt{A_B \cdot a_b}}{3}$$

- ② De nuevo, se puede obtener por Tales conociendo las dimensiones de la pirámide original y la pirámide deficiente.

Tronco de pirámide y pirámide deficiente



Tronco de cono

Definición

Obtención de un tronco de cono

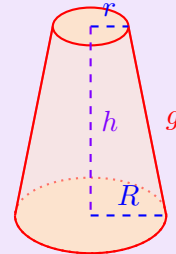
Tronco de cono

Definición

Obtención de un tronco de cono

- Es el cuerpo obtenido al truncar un cono con un plano paralelo a su base.

Figuras



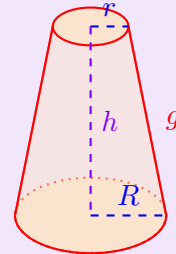
Tronco de cono

Definición

Obtención de un tronco de cono

- Es el cuerpo obtenido al truncar un cono con un plano paralelo a su base.
- También es el cuerpo de revolución obtenido al rotar 360° un trapecio rectángulo alrededor de su lado altura.

Figuras



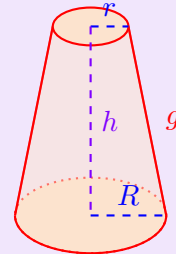
Tronco de cono

Definición

Obtención de un tronco de cono

- Es el cuerpo obtenido al truncar un cono con un plano paralelo a su base.
- También es el cuerpo de revolución obtenido al rotar 360° un trapecio rectángulo alrededor de su lado altura.
- **Consta de :**

Figuras



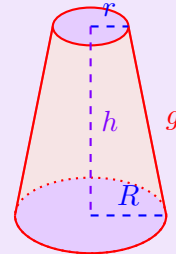
Tronco de cono

Definición

Obtención de un tronco de cono

- Es el cuerpo obtenido al truncar un cono con un plano paralelo a su base.
- También es el cuerpo de revolución obtenido al rotar 360° un trapecio rectángulo alrededor de su lado altura.
- Consta de :
 - Bases mayor y menor

Figuras



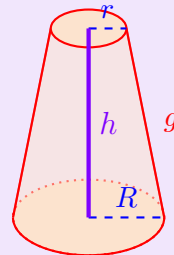
Tronco de cono

Definición

Obtención de un tronco de cono

- Es el cuerpo obtenido al truncar un cono con un plano paralelo a su base.
- También es el cuerpo de revolución obtenido al rotar 360° un trapecio rectángulo alrededor de su lado altura.
- Consta de :
 - Bases mayor y menor
 - **Altura**

Figuras



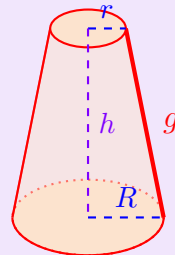
Tronco de cono

Definición

Obtención de un tronco de cono

- Es el cuerpo obtenido al truncar un cono con un plano paralelo a su base.
- También es el cuerpo de revolución obtenido al rotar 360° un trapecio rectángulo alrededor de su lado altura.
- Consta de :
 - Bases mayor y menor
 - Altura
 - **Generatriz**

Figuras

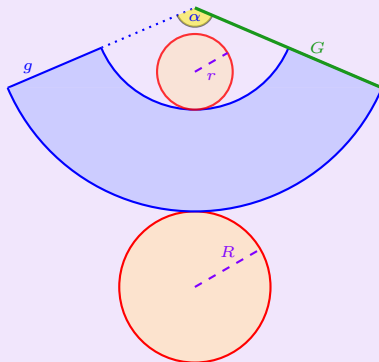


Desarrollo de un tronco de cono

Desarrollo de un tronco de cono

- Sea G la generatriz del cono sin trun-car:

Figuras



Tronco de cono

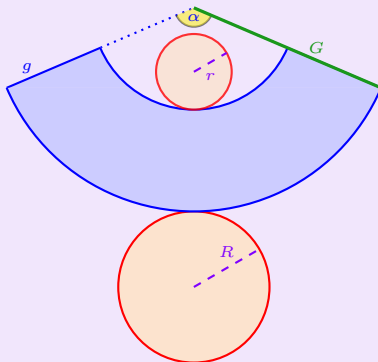
Desarrollo

Desarrollo de un tronco de cono

- Sea G la generatriz del cono sin trincar:

- $\alpha = 360^\circ \cdot \frac{r}{G}$

Figuras



Área de un tronco de cono.

Obtención a partir de sus elementos

Área de un tronco de cono:

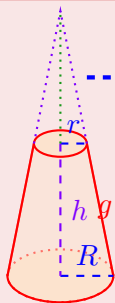
Área de un tronco de cono.

Obtención a partir de sus elementos

Área de un tronco de cono:

$$① A = A(\text{bases}) + A_l = \pi \cdot (R^2 + r^2) + \pi \cdot g \cdot (R + r)$$

Tronco de cono y cono deficiente



Tronco de cono



Cono deficiente

Área de un tronco de cono.

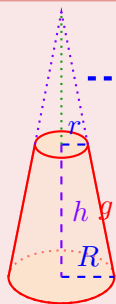
Obtención a partir de sus elementos

Área de un tronco de cono:

① $A = A(\text{bases}) + A_l = \pi \cdot (R^2 + r^2) + \pi \cdot g \cdot (R + r)$

② Se puede obtener por Tales conociendo las dimensiones del cono original y del cono deficiente.

Tronco de cono y cono deficiente



Tronco de cono



Cono deficiente

Área de un tronco de cono.

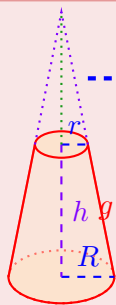
Obtención a partir de sus elementos

Volumen de un cono:

$$① \quad V = \frac{\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)}{3}$$

- ② De nuevo, se puede obtener por Tales conociendo las dimensiones del cono original y del cono deficiente.

Tronco de cono y cono deficiente



Tronco de cono



Cono deficiente