TEMA 5: NÚMEROS RACIONALES

TIEMPO: 73 — 85

Esquema

1) Introducción
   - 1.1) Antigüedad
   - 1.2) Babilonios
   - 1.3) Griegos
   - 1.4) Hindúes + Árabes
   - 1.5) Stévin - Bürgi - Magini - Wilbord
   - 1.6) Conclusión

2 Construcción de $\mathbb{Q}$
   - 2.1) Introducción
   - 2.2) Construcción abstracta
   - 2.3) Proposición/Definición de $\mathbb{Q}$
   - 2.4) Suma
     - 2.4.1) Definición
     - 2.4.2) Propiedades
   - 2.5) Producto
     - 2.5.1) Definición
     - 2.5.2) Propiedades
   - 2.6) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
     - 2.6.1) Unicidad

3) Orden en $\mathbb{Q}$
   - 3.1) Definición
   - 3.2) Orden total compatible con las operaciones
   - 3.3) Es el $\leq$ de $\mathbb{Z}$
   - 3.4) Arquimediano + denso
   - 3.5) $\mathbb{Q}$ es numerable

1) Introducción:

▷ Antigüedad: Las fracciones ya eran conocidas en la Antigüedad, pero al no existir un sistema de numeración preciso o apropiado, recibieron durante mucho tiempo notaciones imprecisas, heterogéneas e inadaptadas a las aplicaciones prácticas.
Al principio las fracciones no fueron consideradas como números, ni siquiera se concebía la noción de fracción general $\dfrac{m}{n}$ como m veces la inversa n.
Con el desarrollo de la aritmética y el cálculo se descubrió, ya en época antigua, que las fracciones estaban sujetas a las mismas reglas que los naturales y, por tanto, podían asimilarse a números.
Gracias a esta extensión, los números que antaño sólo servían para hacer recuentos se transformaron en "referencias" adaptadas a diversos usos. De ahora en adelante, no se conformaron con comparar dos magnitudes "a ojo", se las podía dividir (o, al menos, suponerlas divididas) en partes iguales a una magnitud de la misma clase elegida como patrón. Pero, a pesar de este progreso, los antiguos, a causa de sus notaciones imperfectas, no supieron ni unificar la noción de fracción ni construir un sistema coherente para sus unidades de medida.

▷ Babilonios: los babilonios, gracias a su numeración de posición en base sexagesimal, fueron los primeros que dieron a las fracciones una notación racional, convirtiéndolas en fracciones sexagesimales y expresándolas como algo parecido a la forma de expresar fracciones de horas en minutos y segundos: 17min, 53 seg $= 17/60$h $+ 53/3600$h. Pero los babilonios no conocieron el uso de la "coma decimal" para diferenciar los enteros de las fracciones sexagesimales de la unidad. De esta manera, la expresión 17;53 podía significar 17h, 53m o 0h, 17m, 53s. Era una notación "flotante" que sólo se podía precisar por el contexto.

▷ Griegos: los griegos, más tarde, intentaron dar una notación general a las fracciones ordinarias, pero como era difícil adaptar su numeración alfabética a esta simbolización, dejaron de intentarlo y adoptaron la notación sexagesimal babilónica.

▷ Hindúes + Árabes: la notación moderna de las fracciones ordinarias se debe a los hindúes que, gracias a su numeración decimal de posición, simbolizaron, más o menos como nosotros hacemos, una cierta fracción. Por ejemplo, para $\frac{27}{724}$ escribían $\begin{matrix}27\\724\end{matrix}$. Más tarde esta notación fue adaptada y perfeccionada por los árabes que inventaron la raya horizontal.

▷ Stévin - Bürgi - Magini - Wilbord: posteriormente, gracias al descubrimiento de las fracciones llamadas "decimales" se descubrió poco a poco que resultaba práctico prolongar la numeración decimal de posición en el otro sentido, es decir, en términos modernos: representar números "después de la coma". Esto permitió representar todas las fracciones y hacer aparecer a los enteros como fracciones particulares.
En Europa el belga Simón Stévin fue el primero que, en el s.XVI, dio el paso decisivo hacia nuestro actual sistema de notación al escribir, donde nosotros escribíamos: 523,239 → 523 (0) 2(1) 3 (2) 9(3) indicando 523 partes enteras, 2 unidades decimales de primer orden, etc.
Diez años más tarde, el suizo Jost Bürgi lo simplificó escribiendo: $52\overset{\circ}{3}239$, es decir, poniendo encimas de las unidades el sigo (○).
El mismo año, el italiano Magini sustituyó el redondel por un punto: 523.239 colocado entre las unidades y las décimas (notación que se conserva en los países anglosajones).
La coma que nosotros utilizamos fue ideada por el holandés Wilbord Snellius a principios del s.XVII.

$\triangleright$ Conclusión: la consecuencia de esta racionalización de la noción y representación de fracciones fueron incalculables en todos los campos.
Empezando por la invención del sistema métrico decimal: sistema metrológico de base 10, totalmente coherente y perfectamente adaptado al cálculo numérico que la Revolución Francesa ofreció en 1.792 en sustitución de los antiguos sistemas de unidades del territorio francés.

$\triangleright$ La construcción de $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ la basaremos en que desde cualquier anillo no trivial podemos construir su cuerpo de fracciones.

2) Construcción de $\mathbb{Q}$:

$\triangleright$ Consideramos el Dominio de Integridad $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ y nos damos cuenta que no siempre existe solución a la ecuación $a \cdot x = b$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ ($a \neq 0$ para no trivializar).
Queremos entonces encontrar una estructura algebraica que contenga a $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ como subconjunto (o isomorfo a él) y en el que la ecuación anterior siempre tenga solución. Además, dicha estructura es la menor en la que lo anterior tenga sentido (incluir $\mathbb{Z}$ en los reales sería más de lo que, en principio, queremos. Además, la construcción que aquí ofrecemos es interesante por sí misma).
En términos más formales queremos construir el cuerpo conmutativo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ de forma que el anillo de los enteros $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ sea isomorfo a una parte de dicho cuerpo y, salvo isomorfismo, $\mathbb{K}$ no contiene ningún subcuerpo propio que cumpla las mismas condiciones (contener a $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ y ser cuerpo).

$\triangleright$ **Definición**: llamamos monoide multiplicativo S a un conjunto $S \subseteq A$ (anillo) de manera que se cumple:

a) $1 \in S$ (el neutro para el producto).

b) $0 \notin S$ (vamos a "tomar fracciones", así que el cero no puede estar).

c) $\forall a, b \in S, a \cdot b \in S$

$\triangleright$ Si tenemos D un dominio de integridad, podemos tomar $S = D^* = D - \{0\}$ y definimos la siguiente relación de equivalencia:
Dados $a, b \in D$, $s, \hat{s} \in S$ diremos que $(a, s) \sim (b, \hat{s}) \longleftrightarrow a \cdot \hat{s} = b \cdot s$

$\triangleright$ La construcción abstracta se puede hacer en el ámbito $S \subset D^*$ (estricto), pero en nuestro caso particular no nos daría lo esperado. Es trivial comprobar que lo anterior es una relación de equivalencia. Lo siguiente que haremos será probar la siguiente afirmación:

$\triangleright$ **Proposición/Definición de $\mathbb{Q}$**: $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/ \sim, +, \cdot) \equiv (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es el cuerpo buscado y lo llamaremos cuerpo de los racionales o cuerpo de las fracciones sobre el dominio de integridad $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

$\triangleright$ Tenemos que demostrar varias cosas, pero empecemos dando sentido a las dos operaciones de $\mathbb{Q}$: "+" y "$\cdot$" y viendo algunas de sus propiedades. El resto de la sección se va a dedicar a demostrar la afirmación anterior. Terminaremos esta parte con algunas propiedades de los números raciones.
Nótese que la construcción de $\mathbb{Q}$ aquí hecha puede aplicarse a cualquier Dominio de Integridad (por ejemplo, $\mathbb{Z}_5$).

$\triangleright$ **Suma**: $\forall (a, s), (\hat{a}, \hat{s}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ definimos: $\overline{(a, s)} + \overline{(\hat{a}, \hat{s})} = \overline{(a \cdot \hat{s} + s \cdot \hat{a}, s \cdot \hat{s})}$, es decir, la suma de fracciones "a lo bruto".
$\triangleright$ Operación interna: $a \cdot \hat{s} + s \cdot \hat{a} \in \mathbb{Z}$, $s \cdot \hat{s} \in \mathbb{Z}^* \to$ la clase del elemento está en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/ \sim$.
$\triangleright$ Independencia de los representantes: sean $\overline{(a, s)} = \overline{(b, r)}$ y $\overline{(\hat{a}, \hat{s})} = \overline{(\hat{b}, \hat{r})}$ y queremos ver que $\overline{(a \cdot \hat{s} + s \cdot \hat{a}, s \cdot \hat{s})} = \overline{(b \cdot \hat{r} + r \cdot \hat{b}, r \cdot \hat{r})}$

Dem. Si así fuera, tomando el primer término: $r \cdot \hat{r} \cdot a \cdot \hat{s} + r \cdot \hat{r} \cdot s \cdot \hat{a} = b \cdot s \cdot \hat{r} \cdot \hat{s} =$ usando las igualdades de las clases $= (s \cdot \hat{s}) \cdot (b \cdot \hat{r} + \hat{b} \cdot r)$ que es el segundo miembro.

$\square$

$\triangleright$ Propiedades:

a) Asociativa: trivial

b) Conmutativa: trivial

c) Elemento neutro $e = \overline{(0,1)} = [(0,1))]$.

Dem. $[(a,s)] + [(0,1)] = [(0,1)] + [(a,s)] = [(a,s)]$. Si aplicamos la fórmula nos sale que: $e = [(e_1, e_2)] \to a \cdot e_2 + s \cdot e_1 = a$ y $s \cdot e_2 = s \to e_2 = 1$ y $e_1 = 0$ $\square$

d) Elemento simétrico: $[(a,s)] \sim [(a,-s)] = [(-a,s)]$

Dem. Operamos para obtener: $[(a,s)] + [(a,-s)] = \overline{(0, -s \cdot s)} = \overline{(0,1)}$.

$\square$

$\triangleright$**Producto**: $\forall (a,\ s),\ (\hat{a},\ \hat{s}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ definimos: $\overline{(a,s)} \times \overline{(\hat{a},\hat{s})} = \overline{(a \cdot \hat{a}, s \cdot \hat{s})}$, es decir, la multiplicación de fracciones habitual.
$\triangleright$ Operación interna: trivial.
$\triangleright$ Independencia de los representantes:

Dem. Sean $\overline{(a,s)} = \overline{(\hat{a},\hat{s})}$, $\overline{(b,r)} = \overline{(\hat{b},\hat{r})}$. Entonces queremos ver que $[(a \cdot b, s \cdot r)] = [(\hat{a} \cdot \hat{b}, \hat{r} \cdot \hat{s})] \longleftrightarrow (a \cdot b) \cdot (\hat{r}\hat{s}) = (s \cdot r)(\hat{a} \cdot \hat{b})$. Desarrollamos los productos y, por la equivalencia de clases, lo obtenemos.

$\square$

$\triangleright$ Propiedades:

a) Asociativa: trivial.

b) Conmutativa: trivial.

c) Elemento neutro: $e = [(1,1)]$: trivial.

d) Todos elemento $[(a,b)]$ menos el $[(0,1)]$ tiene simétrico y éste es $[(b,a)]$.

Dem. $[(a,b)] \times [(b,a)] = [(a \cdot b, a \cdot b)] = [(1,1)]$ $\square$

e) Distributiva respecto a la suma.

$\triangleright$ Ya hemos probado que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo con unidad. Veamos que contiene una copia isomorfa de $\mathbb{Z}$.

▷ **Proposición** $\mathbb{Z}$ es isomorfo a un subanillo de $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$:

Dem. Sea la aplicación $f : \mathbb{Z} \mapsto H \subset \mathbb{Q}$ dada por $f(a) = \overline{(a, 1)}$. Hay que comprobar que:

1) f homomorfismo: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $f(a+b) = f(a) + f(b)$ y $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$: se cumple por cómo hemos definido las operaciones.

2) f inyectiva: $f(a) = \overline{(0, 1)} \longleftrightarrow 1 \cdot a = 0 \cdot 1 \longleftrightarrow a = 0$: se cumple.

3) f sobreyectiva: se cumple, pues $H = \mathrm{Im}(f)$

Luego f es un isomorfismo y es claro que $H \subset \mathbb{Q}$ estrictamente.

$\square$

▷ A partir de ahora identificaremos $a \in \mathbb{Z}$ por $\overline{(a, 1)} \in \mathbb{Q}$, es decir: $\dfrac{a}{1}$
Además, si $b \cdot x = a$ con $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, siempre tendrá solución en $\mathbb{Q}$ pues, si tenemos:
$\overline{(b, 1)} \cdot x = \overline{(a, 1)} \to x = \left(\overline{(b, 1)}\right)^{-1} \cdot \overline{(a, 1)} = \overline{(1, b)} \cdot \overline{(a, 1)} = \overline{(a, b)}$

▷ **Proposición**: no existe ningún subcuerpo propio de $\mathbb{Q}$ conteniendo a $\mathbb{Z}$ (de forma isomorfa).

Dem. Si $\mathbb{K} \subset \mathbb{Q}$ (estricto) existiera, tendría que contener a $\overline{(a, 1)}$ y a todos los inversos (por ser subcuerpo). Pero entonces $\overline{(a, 1)} \cdot \overline{(1, b)} = \overline{(a, b)} \in \mathbb{K} \to \mathbb{K} = \mathbb{Q}$

$\square$

▷ **Proposición**: no existe, salvo isomorfismos, otro cuerpo más allá de $\mathbb{Q}$ que cumpla los requisitos (el menor cuerpo que contiene a $\mathbb{Z}$ como subanillo y es conmutativo).

▷ Propiedades de $\mathbb{Q}$:

a) En $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ toda ecuación de primer grado con una incógnita tiene solución única.

b) En $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sólo existen ideales impropios, el $< 0 >$ y el total (como en todo cuerpo).

c) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo y, por lo tanto, un Dominio de Integridad.

d) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ no es algebraicamente cerrado.

3) Orden en $\mathbb{Q}$:

$\triangleright$ Se trata de definir un orden sobre $\mathbb{Q}$ que sea compatible con la suma y el producto de elemento positivos (para ese orden). Queremos, además, que dicho orden sea total y, por último, que sea una extensión "natural" del orden de $\mathbb{Z}$ (equivalentemente, que la restricción a $\mathbb{Z}$ de dicho orden sea el usual).

$\triangleright$ Podemos deducirlo. Tomemos, por ejemplo, $\overline{(a,b)}$ con $b > 0$ y supongamos que $\overline{(a,b)} > 0$. Entonces: $\overline{(b,1)} > 0 \to \overline{(a,b)} \times \overline{(b,1)} > 0 \longleftrightarrow \overline{(a \cdot b, b)} > 0 \longleftrightarrow \overline{(a,1)} > 0 \longleftrightarrow a > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$. Tomando en consideración todos los casos, podemos llegar a la siguiente conclusión:

$\triangleright$ **Definición**: diremos que $\overline{(a,b)} \leq 0$ cuando $a \cdot b \leq 0$

$\triangleright$ La definición es independiente del representante elegido.

Dem. $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)} \to a \cdot d = b \cdot c \to a \cdot d \cdot b \cdot d = b \cdot c \cdot b \cdot d \to a \cdot b \cdot d^2 = c \cdot d \cdot b^2$ y al ser b^2, $d^2 \geq 0 \to a \cdot b$ y $c \cdot d$ tienen el mismo signo.

$\square$

$\triangleright$ **Definición**: $[(a,b)] \leq [(c,d)]$ cuando $[(a,b)] - [(c,d)] \leq 0$

$\triangleright$ **Proposición**: la relación "$\leq$" así definida es una relación de orden total en $\mathbb{Q}$

Dem. Las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva se cumplen sin más que aplicar las propiedades del cuerpo $\mathbb{Q}$. Veamos que es total.
Dados $\overline{(a,b)}$, $\overline{(c,d)} \in \mathbb{Q}$ supongamos que no se cumple $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$. Entonces $a/b - c/d > 0 \leftrightarrow a/b + c/(-d) > 0 \leftrightarrow (-ad + bc)/(-bd) > 0 \leftrightarrow (ad - bc)/(bd) > 0$. Esto último quiere decir que $(ad - bc) \cdot (bd) > 0$ y como $\mathbb{Z}$ está totalmente ordenado y el orden es compatible con la suma:
$bd \cdot (bc - ad) < 0 \to \overline{(c,d)} < \overline{(a,b)}$, probando así que dados dos elementos cualesquiera de $\mathbb{Q}$, están relacionados por "$\leq$".

$\square$

$\triangleright$ **Proposición**: la relación "$\leq$" es compatible con la suma y el producto de números positivos en $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, lo que hace que $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ sea un cuerpo totalmente ordenado.

Dem. Probémoslo para el producto y para la suma se hace de manera análoga.
Sean $\overline{(a,b)}$, $\overline{(c,d)} \in \mathbb{Q}$ y $a/b \geq 0$ (el otro caso es análogo) y $c/d \geq 0$. Vamos a probar que $\overline{(a,b)} \times \overline{(c,d)} > 0$.
Como a/b, $c/d \geq 0 \to a \cdot b$, $c \cdot d \geq 0 \to 0 \leq a \cdot b \cdot c \cdot d \in \mathbb{Z}$ y lo anterior no es más que $\overline{(a \cdot c, b \cdot d)} \geq 0$ como pretendíamos.

$\square$

$\triangleright$ **Proposición**: la relación "$\leq$" en $\mathbb{Q}$ es la usual cuando nos restringimos a $\mathbb{Z}$

Dem. Si $a \leq b \leftrightarrow a - b \leq 0 \leftrightarrow (a \cdot 1 - b \cdot 1) \cdot (1 \cdot 1) \leq 0 \leftrightarrow \overline{(a,1)} - \overline{(b,1)} \leq 0 \leftrightarrow \overline{(a,1)} \leq \overline{(b,1)}$ y éstos son los representantes en $\mathbb{Q}$ de a y b.

$\square$

▷ **Proposición**: en $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ tenemos un orden arquimediano, es decir, dados p, $q \in \mathbb{Q}$ con $0 < p < q$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot p > q$

Dem. Sean $p = a/b$ y $q = c/d$. Como $p < q \to (a \cdot d - b \cdot c) \cdot (b \cdot d) < 0$.
Podemos suponer $b \cdot d > 0 \to a \cdot d < b \cdot c$. Como $\mathbb{Z}$ es arquimediano, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot ad > bc \to a \cdot ab - bc > 0 \to (nad - bc) \cdot (bd) > 0$.
Pero esto último no es más que decir que $\overline{(na, b)} > \overline{(c, d)} \to n \cdot p > q$

□

▷ **Definición**: decimos que un conjunto $(E, \leq)$ tiene un orden denso cuando $\forall x$, $y \in E$ con $x < y$, $\exists z \in E$ tal que $x < z < y$

▷ **Proposición**: $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ tiene un orden denso.

Dem. Si $p < q$ tenemos que $p + p = 2p < p + q < q + q = 2q \to p < (p + q)/2 < q$ y $\frac{p+q}{2} \in \mathbb{Q}$

□

▷ **Proposición**: en $\mathbb{Q}$ no ni primer ni último elemento respecto a "$\leq$".

Dem. Consecuencia del orden arquimediano y de la contención de $\mathbb{Z}$.

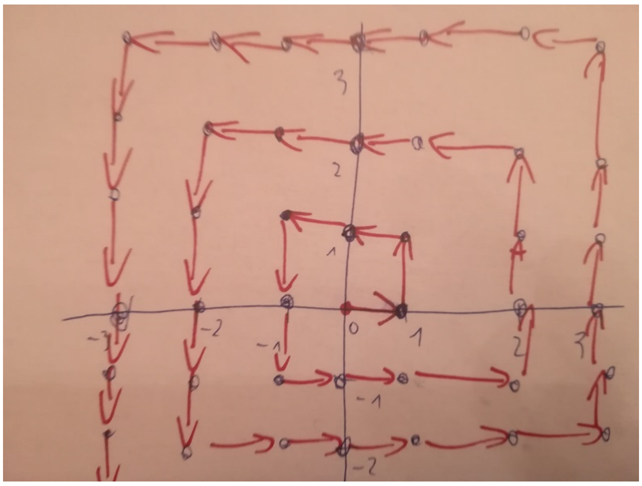
□

▷ **Proposición**: $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable. Es decir, $\exists f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Q}$ biyectiva.

Dem. Hay muchas maneras de probarlo. Una de las más elegantes desde el punto de vista formal es demostrar que:

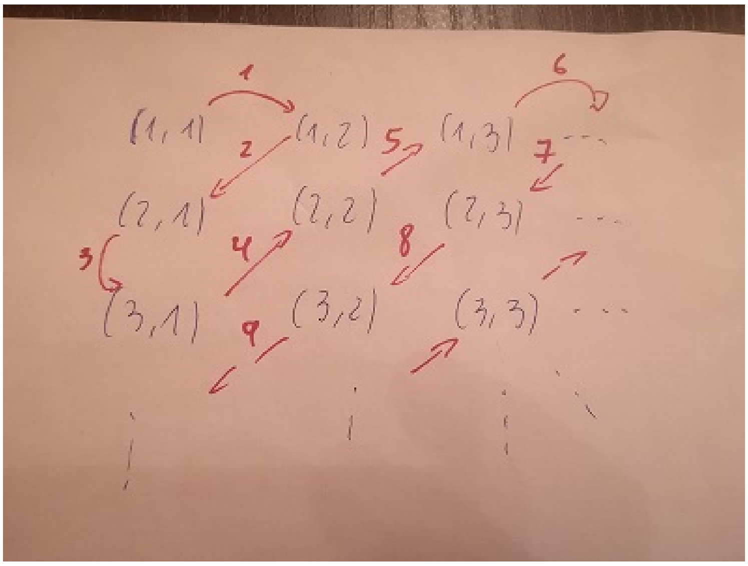
a) $\exists f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$ biyectiva (pares a positivos e impares a negativos por ejemplo).

b) $\exists g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ biyectiva



c) Usar ambas para ir de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$ y obtener $h : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Q}$ biyectiva (primero de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y después a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$).

Otra forma es usar la intuición gráfica de la forma siguiente:



Por una parte parece claro que Card($\mathbb{Q}$)$\geq$Card($\mathbb{N}$) pues $1/2 \in \mathbb{Q}$ pero $1/2 \notin \mathbb{N}$.
Por otro lado señalamos en el plano todos los puntos de la forma (a, b) con $a, b \in \mathbb{Z}$, desde el origen los vamos uniendo con una curva espiral y vamos enumerando cada punto. Claramente hay más puntos que en $\mathbb{Q}$ pues el $(0,0) \notin \mathbb{Q}$ o $\overline{(1,2)} = \overline{(2,4)}$ y lo contamos dos veces.
Del punto anterior se concluye que Card($\mathbb{N}$)$\geq$Card($\mathbb{Q}$) y, junto con lo primero, obtenemos la igualdad.

$\square$

$\triangleright$ $\mathbb{Q}$ no es completo, es decir, no toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ tiene por límite un número racional. Además, dados A, $B \subset \mathbb{Q}$ no vacíos, con $A \cup B = \mathbb{Q}$ y $A \cap B = \emptyset$ y $\forall a \in A$ y $\forall b \in B \to a \leq b$ no se puede dar que el primer elemento de B y el último de A estén en $\mathbb{Q}$ simultáneamente. Esto nos dice que el orden de $\mathbb{Q}$ presenta “huecos” (esta será la idea de las cortaduras de Dedekin para construir $\mathbb{R}$).