Geometría analítica

David Matellano

Departamento de Matemáticas. IES Ángel Corella. (Colmenar Viejo)

6 de mayo de 2019

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons "Reconocimiento-NoCommercial-CompartirIgual 3.0 España".

índice de contenidos I

1. Vectores en el plano
   - Definición de vector
   - Elementos de un vector
   - Coordenadas de un vector
   - Vector que representa un punto P
   - Vector que une dos puntos
2. Operaciones con vectores
   - Suma de dos vectores
   - Resta de dos vectores
   - Producto de un escalar y un vector
   - Vectores unitarios
3. Punto medio de un segmento
4. Simétrico respecto de un punto Q

índice de contenidos II

5 Ecuaciones de la recta en el plano
- La ecuación vectorial
- Las ecuaciones paramétricas
- La ecuación continua
- La ecuación general o implícita
- La ecuación punto-pendiente

6 Distancia entre dos puntos

7 La circunferencia
- La ecuación canónica
- La ecuación ordinaria
- La ecuación general
  - Obtención del centro y radio

Vectores en el plano

Definición de vector

Definición de vector

- Es un elemento perteneciente al espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

Vectores en el plano

Definición de vector

Definición de vector

- Es un elemento perteneciente al espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.
- Consta de **módulo, dirección y sentido.**

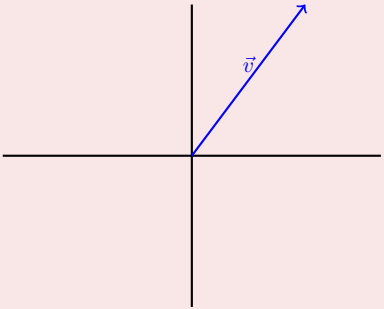
Vectores en el plano

Definición de vector

Definición de vector

- Es un elemento perteneciente al espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.
- Consta de **módulo, dirección y sentido.**
- Lo representamos mediante *una flecha* en el plano.

Figuras



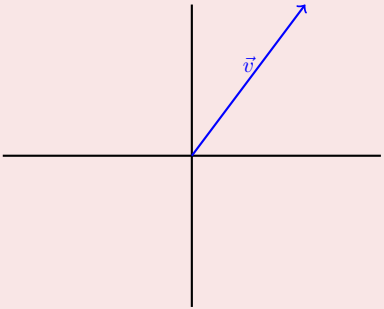
Elementos de un vector

Módulo, dirección y sentido

Módulo, dirección y sentido

- Módulo $\Rightarrow$ Es la longitud del vector $\vec{v}$.

Figuras



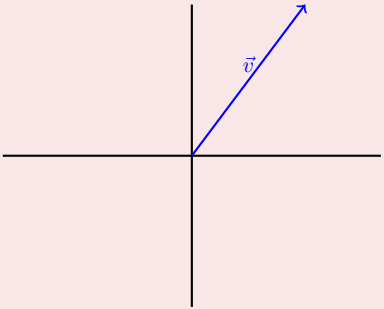
Elementos de un vector

Módulo, dirección y sentido

Módulo, dirección y sentido

- Módulo $\Rightarrow$ Es la longitud del vector $\vec{v}$.
  - Se representa como $|\vec{v}|$

Figuras



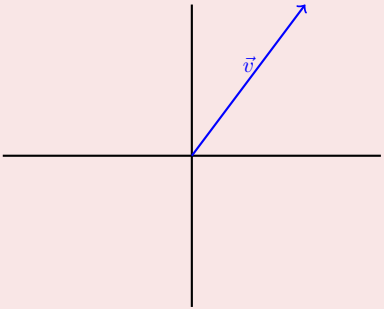
Elementos de un vector

Módulo, dirección y sentido

Módulo, dirección y sentido

- Módulo $\Rightarrow$ Es la longitud del vector $\vec{v}$.
  - Se representa como $|\vec{v}|$
- Dirección $\Rightarrow$ Se obtiene con los cosenos directores:

Figuras



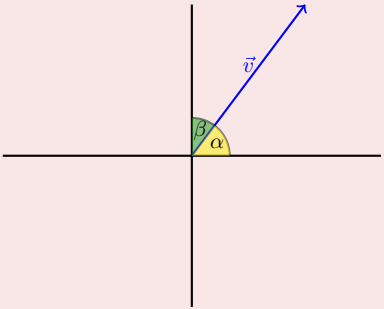
Elementos de un vector

Módulo, dirección y sentido

Módulo, dirección y sentido

- Módulo $\Rightarrow$ Es la longitud del vector $\vec{v}$.
  - Se representa como $|\vec{v}|$
- Dirección $\Rightarrow$ Se obtiene con los cosenos directores:
  - Son los cosenos de los ángulos α y β

Figuras



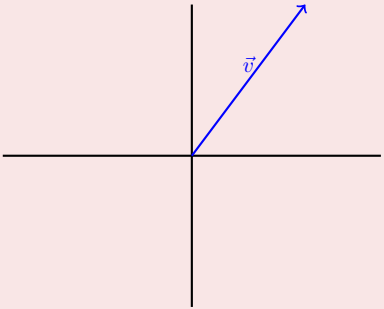
Elementos de un vector

Módulo, dirección y sentido

Módulo, dirección y sentido

- Módulo $\Rightarrow$ Es la longitud del vector $\vec{v}$.
  - Se representa como $|\vec{v}|$
- Dirección $\Rightarrow$ Se obtiene con los cosenos directores:
  - Son los cosenos de los ángulos α y β
- Sentido $\Rightarrow$ Nos indica el origen y el final de $\vec{v}$

Figuras



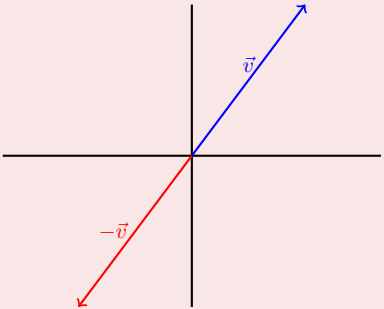
Elementos de un vector

Módulo, dirección y sentido

Módulo, dirección y sentido

- Módulo $\Rightarrow$ Es la longitud del vector $\vec{v}$.
  - Se representa como $|\vec{v}|$
- Dirección $\Rightarrow$ Se obtiene con los cosenos directores:
  - Son los cosenos de los ángulos α y β
- Sentido $\Rightarrow$ Nos indica el origen y el final de $\vec{v}$
  - Si cambiamos el sentido obtenemos $-\vec{v}$

Figuras



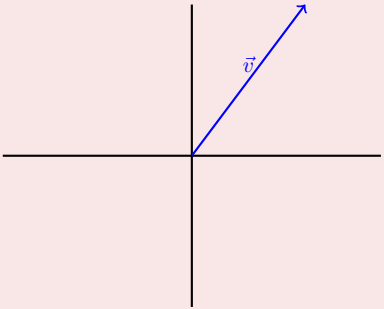
Coordenadas de un vector

Definición.

Coordenadas de un vector

- Un vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ es un par ordenado (v_x, v_y)

Figuras



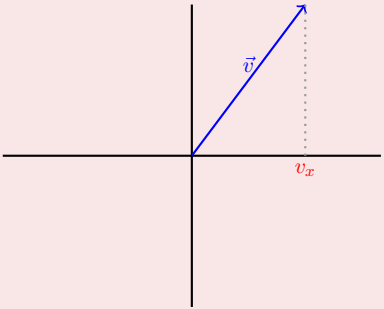
Coordenadas de un vector

Definición.

Coordenadas de un vector

- Un vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ es un par ordenado (v_x, v_y)
- v_x es la proyección de $\vec{v}$ sobre el eje OX.

Figuras



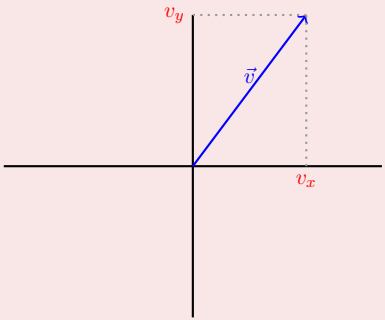
Coordenadas de un vector

Definición.

Coordenadas de un vector

- Un vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ es un par ordenado (v_x, v_y)
- v_x es la proyección de $\vec{v}$ sobre el eje OX.
- v_y es la proyección de $\vec{v}$ sobre el eje OY.

Figuras



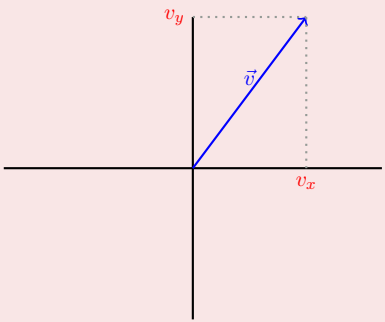
Coordenadas de un vector

Definición.

Coordenadas de un vector

- Un vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ es un par ordenado (v_x, v_y)
- v_x es la proyección de $\vec{v}$ sobre el eje OX.
- v_y es la proyección de $\vec{v}$ sobre el eje OY.
- Relación de (v_x, v_y) y $|\vec{v}|$:

Figuras



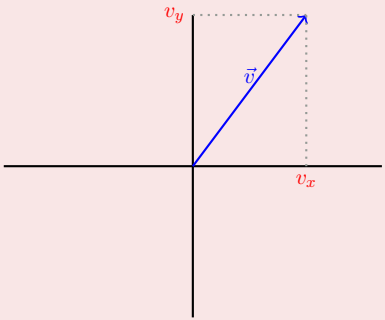
Coordenadas de un vector

Definición.

Coordenadas de un vector

- Un vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ es un par ordenado (v_x, v_y)
- v_x es la proyección de $\vec{v}$ sobre el eje OX.
- v_y es la proyección de $\vec{v}$ sobre el eje OY.
- Relación de (v_x, v_y) y $|\vec{v}|$:
  - Pitágoras: $\Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Figuras



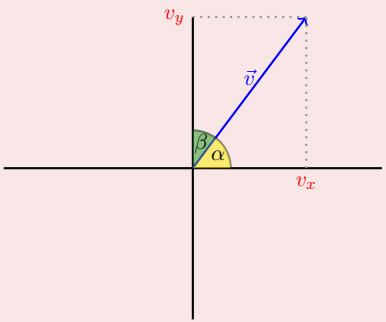
Coordenadas de un vector

Definición.

Coordenadas de un vector

- Un vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ es un par ordenado (v_x, v_y)
- v_x es la proyección de $\vec{v}$ sobre el eje OX.
- v_y es la proyección de $\vec{v}$ sobre el eje OY.
- Relación de (v_x, v_y) y $|\vec{v}|$:
  - Pitágoras: $\Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
  - Cosenos directores:
    $\Rightarrow v_x = |\vec{v}| \cdot \cos\alpha;\ v_y = |\vec{v}| \cdot \cos\beta$

Figuras

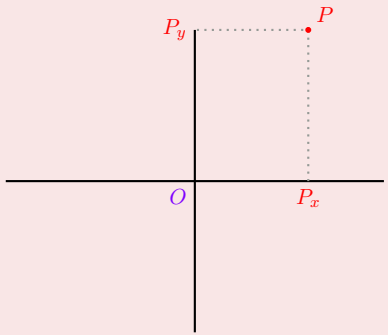


Vector que representa un punto P

Vector que representa un punto P

- Sea el punto $P = (P_x, P, y)$

Figuras

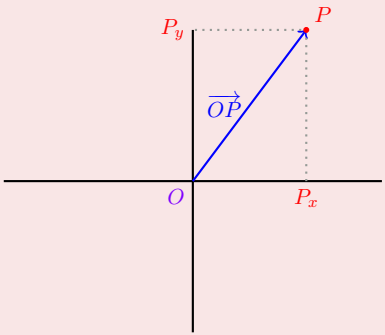


Vector que representa un punto P

Vector que representa un punto P

- Sea el punto $P = (P_x, P, y)$
- El vector $\overrightarrow{OP} = (P_x, P_y)$ une el origen de coordenadas con el punto P

Figuras



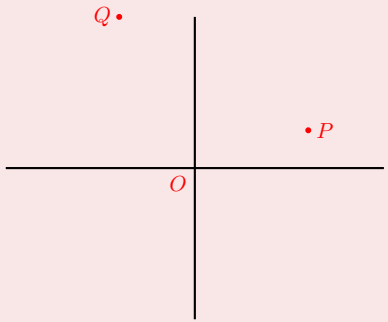
Vector que une dos puntos

El vector $\overrightarrow{PQ}$

El vector $\overrightarrow{PQ}$

- Dados los puntos P y Q:

Figuras



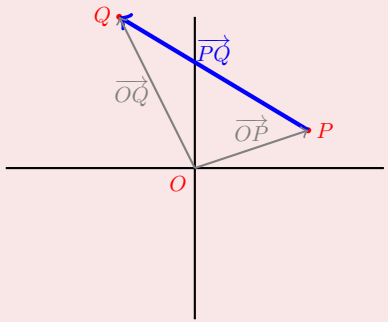
Vector que une dos puntos

El vector $\overrightarrow{PQ}$

El vector $\overrightarrow{PQ}$

- Dados los puntos P y Q:
- El vector $\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$

Figuras



Operaciones con vectores

Suma de dos vectores

Suma de dos vectores

- Cálculo de $\vec{u} + \vec{v}$

Operaciones con vectores

Suma de dos vectores

Suma de dos vectores

- Cálculo de $\vec{u} + \vec{v}$
- Por coordenadas:

Operaciones con vectores

Suma de dos vectores

Suma de dos vectores

- Cálculo de $\vec{u} + \vec{v}$
- Por coordenadas:
  - $\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$

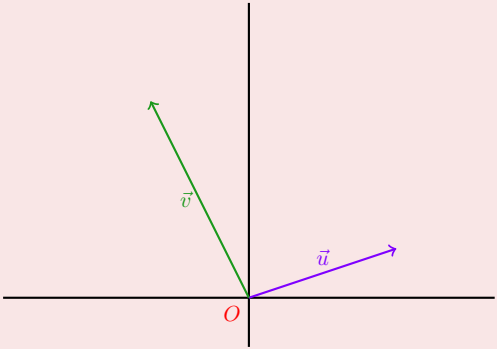
Operaciones con vectores

Suma de dos vectores

Suma de dos vectores

- Cálculo de $\vec{u} + \vec{v}$
- Por coordenadas:
  - $\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$
- Gráficamente: La regla del paralelogramo

Figuras



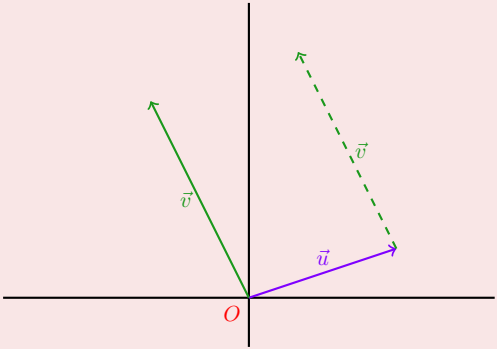
Operaciones con vectores

Suma de dos vectores

Suma de dos vectores

- Cálculo de $\vec{u} + \vec{v}$
- Por coordenadas:
  - $\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$
- Gráficamente: La regla del paralelogramo
  - Al final de $\vec{u}$ colocamos $\vec{v}$

Figuras



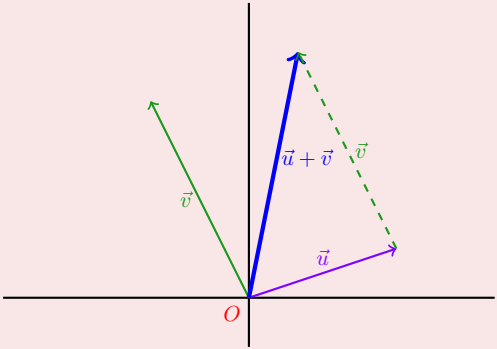
Operaciones con vectores

Suma de dos vectores

Suma de dos vectores

- Cálculo de $\vec{u} + \vec{v}$
- Por coordenadas:
  - $\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$
- Gráficamente: La regla del paralelogramo
  - Al final de $\vec{u}$ colocamos $\vec{v}$
  - Unimos el inicio de $\vec{u}$ con el final de $\vec{v}$

Figuras



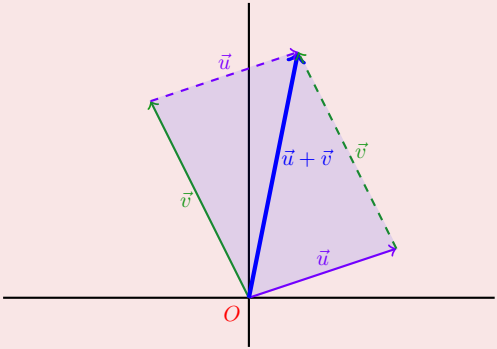
Operaciones con vectores

Suma de dos vectores

Suma de dos vectores

- Cálculo de $\vec{u} + \vec{v}$
- Por coordenadas:
  - $\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$
- Gráficamente: La regla del paralelogramo
  - Al final de $\vec{u}$ colocamos $\vec{v}$
  - Unimos el inicio de $\vec{u}$ con el final de $\vec{v}$
  - La suma $\vec{u} + \vec{v}$ es conmutativa.

Figuras



Operaciones con vectores

Resta de dos vectores

resta de dos vectores

- Cálculo de $\vec{u} - \vec{v}$

Operaciones con vectores

Resta de dos vectores

resta de dos vectores

- Cálculo de $\vec{u} - \vec{v}$
- Por coordenadas:

Operaciones con vectores

Resta de dos vectores

resta de dos vectores

- Cálculo de $\vec{u} - \vec{v}$
- Por coordenadas:
  - $\vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y)$

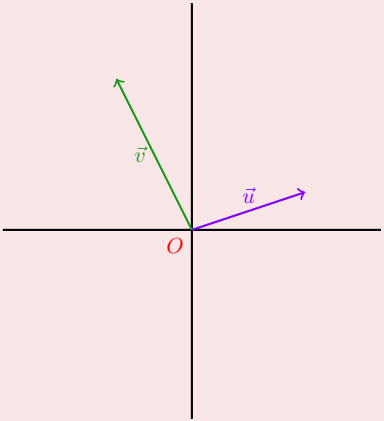
Operaciones con vectores

Resta de dos vectores

resta de dos vectores

- Cálculo de $\vec{u} - \vec{v}$
- Por coordenadas:
  - $\vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y)$
- Gráficamente: La regla del paralelogramo

Figuras



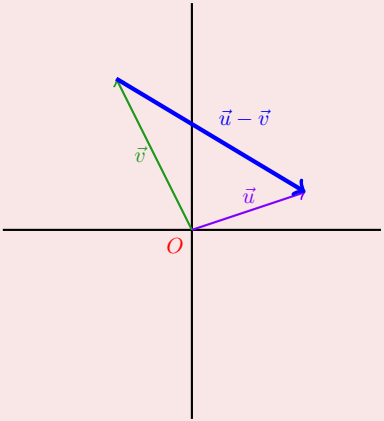
Operaciones con vectores

Resta de dos vectores

resta de dos vectores

- Cálculo de $\vec{u} - \vec{v}$
- Por coordenadas:
  - $\vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y)$
- Gráficamente: La regla del paralelogramo
  - Unimos el final de $\vec{v}$ con el final de $\vec{u}$

Figuras



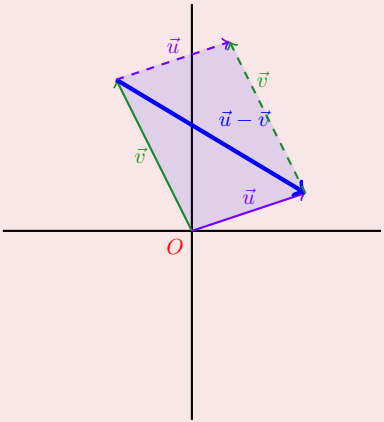
Operaciones con vectores

Resta de dos vectores

resta de dos vectores

- Cálculo de $\vec{u} - \vec{v}$
- Por coordenadas:
  - $\vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y)$
- Gráficamente: La regla del paralelogramo
  - Unimos el final de $\vec{v}$ con el final de $\vec{u}$
  - Es la segunda diagonal del paralelogramo.

Figuras



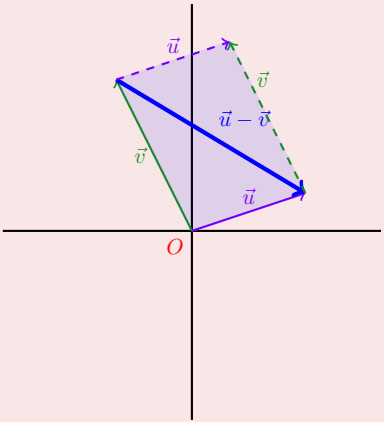
Operaciones con vectores

Resta de dos vectores

resta de dos vectores

- Cálculo de $\vec{u} - \vec{v}$
- Por coordenadas:
  - $\vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y)$
- Gráficamente: La regla del paralelogramo
  - Unimos el final de $\vec{v}$ con el final de $\vec{u}$
  - Es la segunda diagonal del paralelogramo.
  - Explicación: $\vec{v} + (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}$

Figuras



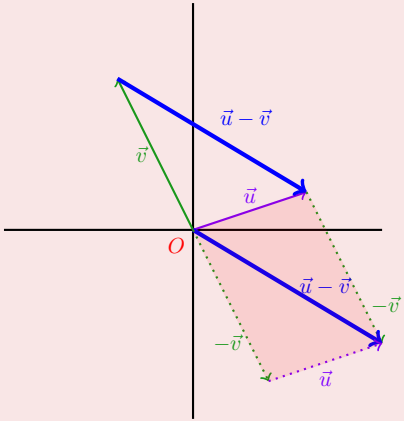
Operaciones con vectores

Resta de dos vectores

resta de dos vectores

- Cálculo de $\vec{u} - \vec{v}$
- Por coordenadas:
  - $\vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y)$
- Gráficamente: La regla del paralelogramo
  - Unimos el final de $\vec{v}$ con el final de $\vec{u}$
  - Es la segunda diagonal del paralelogramo.
  - Explicación: $\vec{v} + (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}$
  - También se puede hacer sumando a $\vec{u}$ el vector $-\vec{v}$

Figuras



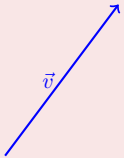
Producto de un escalar y un vector

Producto de un escalar y un vector

- Sean el vector $\vec{v}$ y el escalar $a \neq 0$

Figuras:

$a = 2$

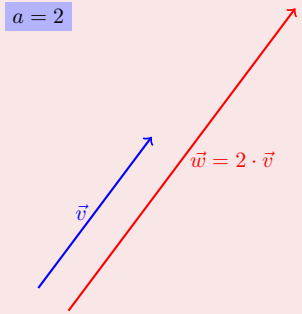


Producto de un escalar y un vector

Producto de un escalar y un vector

- Sean el vector $\vec{v}$ y el escalar $a \neq 0$
- El producto $a \cdot \vec{v}$ es otro vector $\vec{w}$:

Figuras:

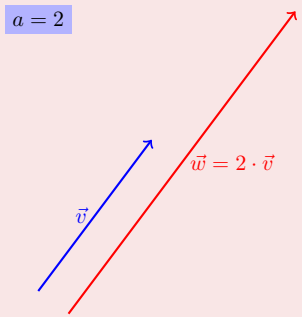


Producto de un escalar y un vector

Producto de un escalar y un vector

- Sean el vector $\vec{v}$ y el escalar $a \neq 0$
- El producto $a \cdot \vec{v}$ es otro vector $\vec{w}$:
- Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son paralelos.

Figuras:

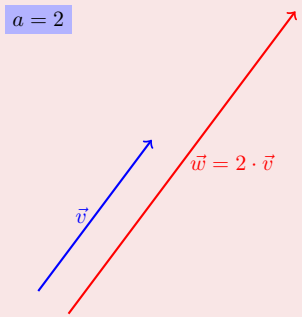


Producto de un escalar y un vector

Producto de un escalar y un vector

- Sean el vector $\vec{v}$ y el escalar $a \neq 0$
- El producto $a \cdot \vec{v}$ es otro vector $\vec{w}$:
- Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son paralelos.
- Si $a > 0 \Rightarrow \vec{w}$ tiene el mismo sentido de $\vec{v}$

Figuras:



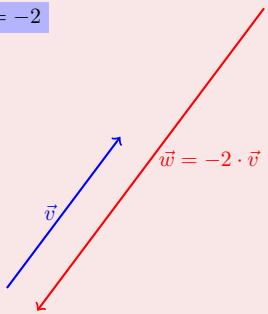
Producto de un escalar y un vector

Producto de un escalar y un vector

- Sean el vector $\vec{v}$ y el escalar $a \neq 0$
- El producto $a \cdot \vec{v}$ es otro vector $\vec{w}$:
- Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son paralelos.
- Si $a > 0 \Rightarrow \vec{w}$ tiene el mismo sentido de $\vec{v}$
- Si $a < 0 \Rightarrow \vec{w}$ tiene el sentido opuesto de $\vec{v}$

Figuras:

$a = -2$

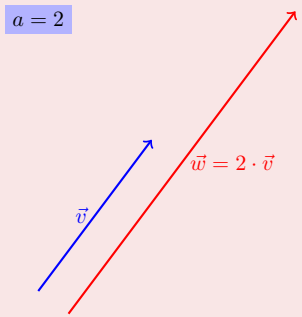


Producto de un escalar y un vector

Producto de un escalar y un vector

- Sean el vector $\vec{v}$ y el escalar $a \neq 0$
- El producto $a \cdot \vec{v}$ es otro vector $\vec{w}$:
- Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son paralelos.
- Si $a > 0 \Rightarrow \vec{w}$ tiene el mismo sentido de $\vec{v}$
- Si $a < 0 \Rightarrow \vec{w}$ tiene el sentido opuesto de $\vec{v}$
- Si $|a| > 1 \Rightarrow |\vec{w}| > |\vec{v}|$

Figuras:



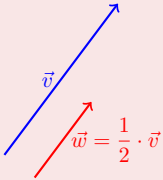
Producto de un escalar y un vector

Producto de un escalar y un vector

- Sean el vector $\vec{v}$ y el escalar $a \neq 0$
- El producto $a \cdot \vec{v}$ es otro vector $\vec{w}$:
- Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son paralelos.
- Si $a > 0 \Rightarrow \vec{w}$ tiene el mismo sentido de $\vec{v}$
- Si $a < 0 \Rightarrow \vec{w}$ tiene el sentido opuesto de $\vec{v}$
- Si $|a| > 1 \Rightarrow |\vec{w}| > |\vec{v}|$
- Si $|a| < 1 \Rightarrow |\vec{w}| < |\vec{v}|$

Figuras:

$a = \frac{1}{2}$



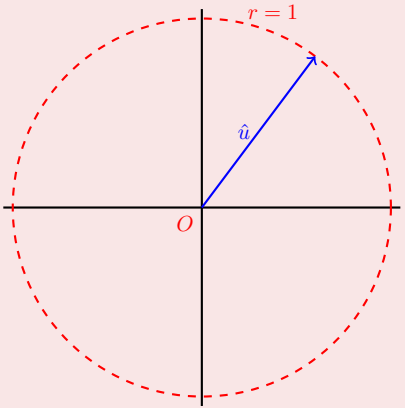
Vectores unitarios

Definición

Vectores unitarios

- $\vec{u}$ es unitario $\Leftrightarrow |\vec{u}| = 1$

Figuras



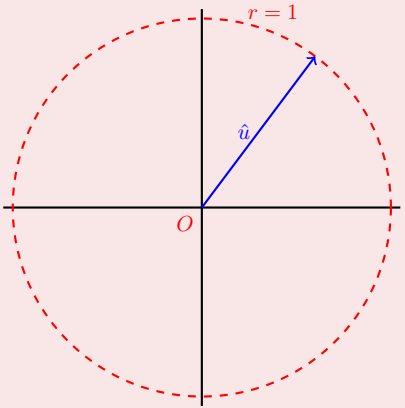
Vectores unitarios

Definición

Vectores unitarios

- $\vec{u}$ es unitario $\Leftrightarrow |\vec{u}| = 1$
- Se representa $\hat{u}$

Figuras



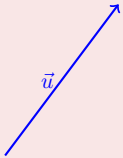
Vectores unitarios

Definición

Vectores unitarios

- $\vec{u}$ es unitario $\Leftrightarrow |\vec{u}| = 1$
- Se representa $\hat{u}$
- Se calcula a partir de un vector $\vec{u}$ cualquiera:

Figuras



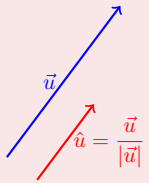
Vectores unitarios

Definición

Vectores unitarios

- $\vec{u}$ es unitario $\Leftrightarrow |\vec{u}| = 1$
- Se representa $\hat{u}$
- Se calcula a partir de un vector $\vec{u}$ cualquiera:
  - $\hat{u} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

Figuras



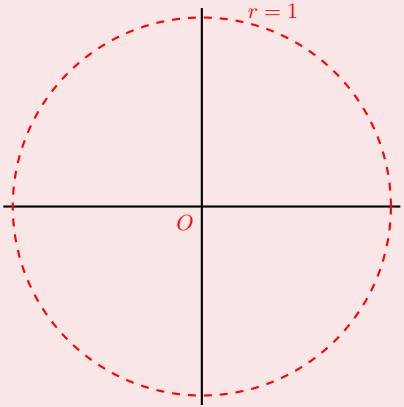
Vectores unitarios

Definición

Vectores unitarios

- $\vec{u}$ es unitario $\Leftrightarrow |\vec{u}| = 1$
- Se representa $\hat{u}$
- Se calcula a partir de un vector $\vec{u}$ cualquiera:
  - $\hat{u} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$
- Vectores unitarios sobre los ejes:

Figuras



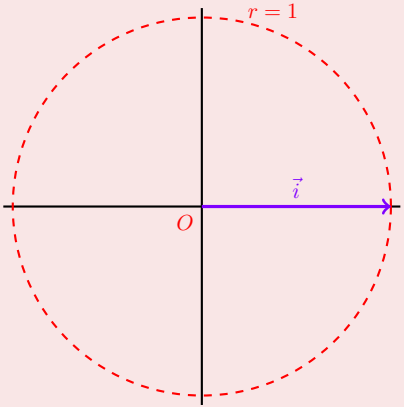
Vectores unitarios

Definición

Vectores unitarios

- $\vec{u}$ es unitario $\Leftrightarrow |\vec{u}| = 1$
- Se representa $\hat{u}$
- Se calcula a partir de un vector $\vec{u}$ cualquiera:
  - $\hat{u} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$
- Vectores unitarios sobre los ejes:
  - Eje x: $\vec{i} = (1, 0)$

Figuras



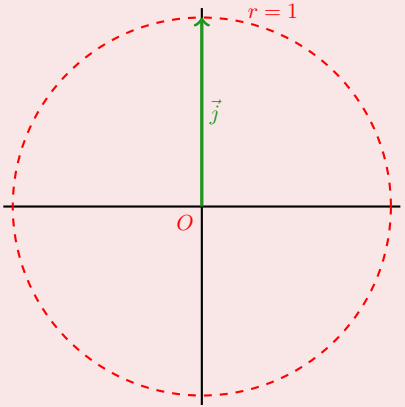
Vectores unitarios

Definición

Vectores unitarios

- $\vec{u}$ es unitario $\Leftrightarrow |\vec{u}| = 1$
- Se representa $\hat{u}$
- Se calcula a partir de un vector $\vec{u}$ cualquiera:
  - $\hat{u} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$
- Vectores unitarios sobre los ejes:
  - Eje x: $\vec{i} = (1, 0)$
  - Eje y: $\vec{j} = (0, 1)$

Figuras

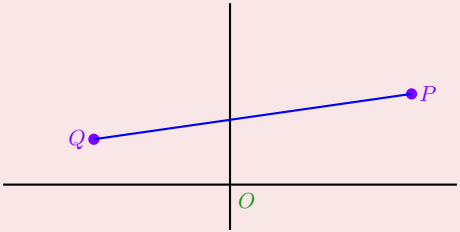


Punto medio de un segmento $\overline{PQ}$

Punto medio de un segmento $\overline{PQ}$

- Sea el segmento $\overline{PQ}$

Figuras

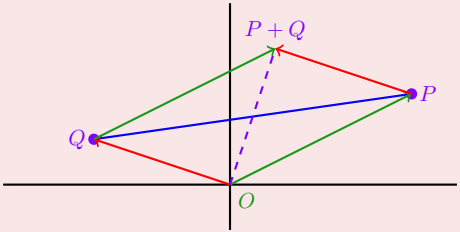


Punto medio de un segmento $\overline{PQ}$

Punto medio de un segmento $\overline{PQ}$

- Sea el segmento $\overline{PQ}$
- Realizamos la *regla del paralelogramo*.

Figuras

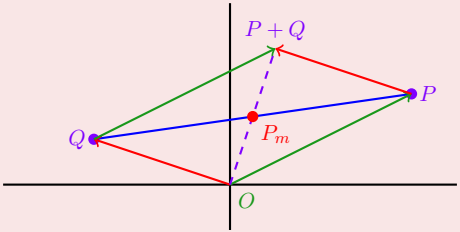


Punto medio de un segmento $\overline{PQ}$

Punto medio de un segmento $\overline{PQ}$

- Sea el segmento $\overline{PQ}$
- Realizamos la *regla del paralelogramo*.
- El punto medio es la intersección de las diagonales.

Figuras

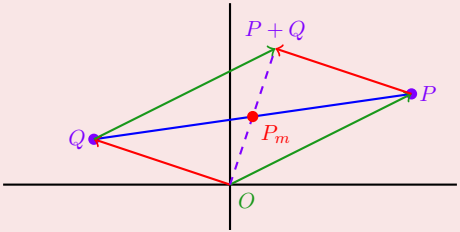


Punto medio de un segmento $\overline{PQ}$

Punto medio de un segmento $\overline{PQ}$

- Sea el segmento $\overline{PQ}$
- Realizamos la *regla del paralelogramo*.
- El punto medio es la intersección de las diagonales.
- Coincide con la mitad de la diagonal $\overline{O(P+Q)}$

Figuras

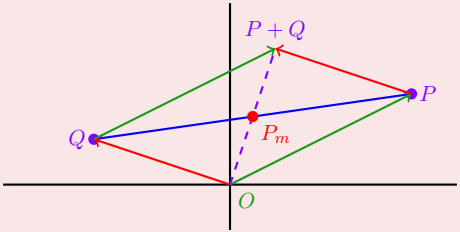


Punto medio de un segmento $\overline{PQ}$

Punto medio de un segmento $\overline{PQ}$

- Sea el segmento $\overline{PQ}$
- Realizamos la *regla del paralelogramo*.
- El punto medio es la intersección de las diagonales.
- Coincide con la mitad de la diagonal $\overline{O(P+Q)}$
- Así, $\boxed{P_m = \dfrac{P+Q}{2}}$

Figuras

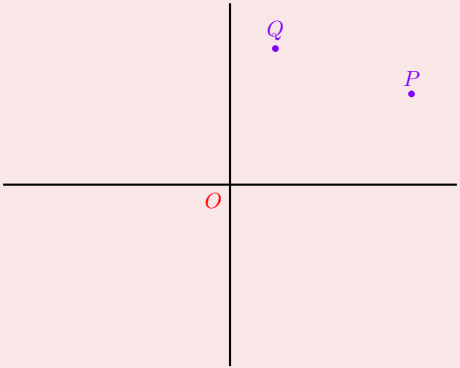


Simétrico respecto de un punto Q

Simétrico respecto de un punto Q

- Sean los puntos P y Q

Figuras

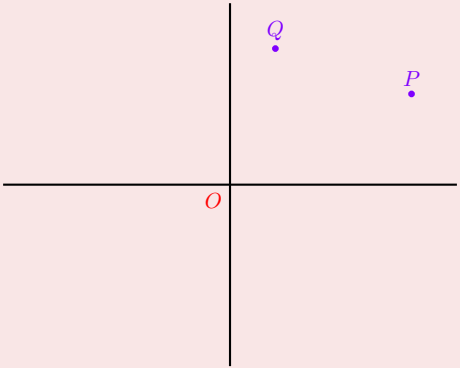


Simétrico respecto de un punto Q

Simétrico respecto de un punto Q

- Sean los puntos P y Q
- El simétrico de P respecto de Q será:

Figuras

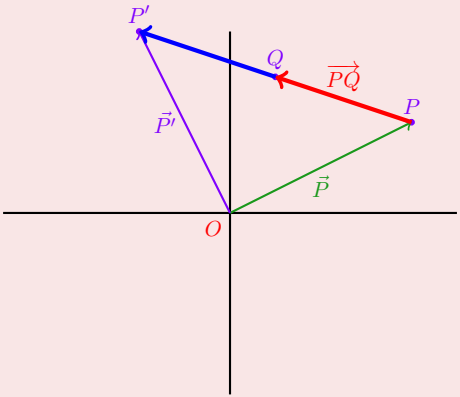


Simétrico respecto de un punto Q

Simétrico respecto de un punto Q

- Sean los puntos P y Q
- El simétrico de P respecto de Q será:
- $P' = Q + \overrightarrow{PQ} = Q + (Q - P) = 2Q - P$

Figuras



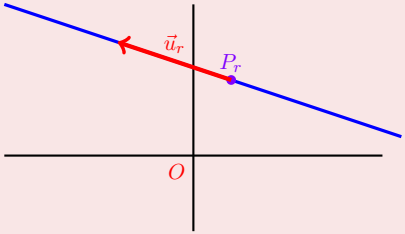
Ecuaciones de la recta en el plano

La ecuación vectorial

La ecuación vectorial

- Una recta r queda definida a partir de un punto P_r de la recta y su vector de dirección $\vec{u_r}$

Figuras



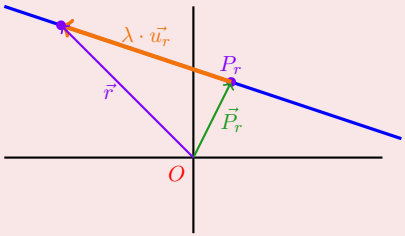
Ecuaciones de la recta en el plano

La ecuación vectorial

La ecuación vectorial

- Una recta r queda definida a partir de un punto P_r de la recta y su vector de dirección $\vec{u_r}$
- Podemos obtener las coordenadas de cualquier punto de r dando valores a λ en su ecuación vectorial:

Figuras



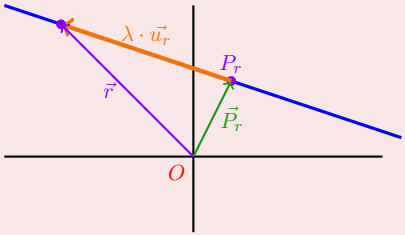
Ecuaciones de la recta en el plano

La ecuación vectorial

La ecuación vectorial

- Una recta r queda definida a partir de un punto P_r de la recta y su vector de dirección $\vec{u_r}$
- Podemos obtener las coordenadas de cualquier punto de r dando valores a λ en su ecuación vectorial:
- $\boxed{\vec{r} = \vec{P_r} + \lambda \cdot \vec{u_r}}$

Figuras



Ecuaciones de la recta en el plano

Las ecuaciones paramétricas

Las ecuaciones paramétricas

- Dada la ecuación vectorial de la recta r: $\vec{r} = \vec{P_r} + \lambda \cdot \vec{u_r}$

Ecuaciones de la recta en el plano

Las ecuaciones paramétricas

Las ecuaciones paramétricas

- Dada la ecuación vectorial de la recta r: $\vec{r} = \vec{P_r} + \lambda \cdot \vec{u_r}$
- Sus elementos son:

Ecuaciones de la recta en el plano

Las ecuaciones paramétricas

Las ecuaciones paramétricas

- Dada la ecuación vectorial de la recta r: $\vec{r} = \vec{P_r} + \lambda \cdot \vec{u_r}$
- Sus elementos son:
  - $\vec{P_r} = (P_x, P_y)$

Ecuaciones de la recta en el plano

Las ecuaciones paramétricas

Las ecuaciones paramétricas

- Dada la ecuación vectorial de la recta r: $\vec{r} = \vec{P_r} + \lambda \cdot \vec{u_r}$
- Sus elementos son:
  - $\vec{P_r} = (P_x, P_y)$
  - $\vec{u_r} = (u_x, u_y)$

Ecuaciones de la recta en el plano

Las ecuaciones paramétricas

Las ecuaciones paramétricas

- Dada la ecuación vectorial de la recta r: $\vec{r} = \vec{P_r} + \lambda \cdot \vec{u_r}$
- Sus elementos son:
  - $\vec{P_r} = (P_x, P_y)$
  - $\vec{u_r} = (u_x, u_y)$
- Descomponemos el vector $\vec{r}$ en sus coordenadas, obteniendo las **ecuaciones paramétricas**:

Ecuaciones de la recta en el plano

Las ecuaciones paramétricas

Las ecuaciones paramétricas

- Dada la ecuación vectorial de la recta r: $\vec{r} = \vec{P_r} + \lambda \cdot \vec{u_r}$
- Sus elementos son:
  - $\vec{P_r} = (P_x, P_y)$
  - $\vec{u_r} = (u_x, u_y)$
- Descomponemos el vector $\vec{r}$ en sus coordenadas, obteniendo las **ecuaciones paramétricas**:
- $$\boxed{\begin{cases} x = P_x + \lambda \cdot u_x \\ \\ y = P_y + \lambda \cdot u_y \end{cases}}$$

Ecuaciones de la recta en el plano

La ecuación continua

La ecuación continua

- A partir de las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = P_x + \lambda \cdot u_x \\ \\ y = P_y + \lambda \cdot u_y \end{cases}$

Ecuaciones de la recta en el plano

La ecuación continua

La ecuación continua

- A partir de las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = P_x + \lambda \cdot u_x \\ \\ y = P_y + \lambda \cdot u_y \end{cases}$
- Despejamos λ de ambas ecuaciones e igualamos, obteniendo la **ecuación continua**

Ecuaciones de la recta en el plano

La ecuación continua

La ecuación continua

- A partir de las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = P_x + \lambda \cdot u_x \\ y = P_y + \lambda \cdot u_y \end{cases}$
- Despejamos λ de ambas ecuaciones e igualamos, obteniendo la **ecuación continua**
- $\boxed{\dfrac{x - P_x}{u_x} = \dfrac{y - P_y}{u_y}}$

La ecuación general o implícita

- A partir de la ecuación continua: $\dfrac{x - P_x}{u_x} = \dfrac{y - P_y}{u_y}$

La ecuación general o implícita

- A partir de la ecuación continua: $\dfrac{x - P_x}{u_x} = \dfrac{y - P_y}{u_y}$
- Realizamos los productos cruzados e igualamos a 0:

La ecuación general o implícita

- A partir de la ecuación continua: $\dfrac{x - P_x}{u_x} = \dfrac{y - P_y}{u_y}$
- Realizamos los productos cruzados e igualamos a 0:
- $u_y(x - P_x) - u_x(y - P_y) = 0 \Rightarrow u_y \cdot x + (-u_x) \cdot y + (u_x \cdot P_y - u_y \cdot P_x) = 0$

La ecuación general o implícita

- A partir de la ecuación continua: $\dfrac{x - P_x}{u_x} = \dfrac{y - P_y}{u_y}$
- Realizamos los productos cruzados e igualamos a 0:
- $u_y(x - P_x) - u_x(y - P_y) = 0 \Rightarrow u_y \cdot x + (-u_x) \cdot y + (u_x \cdot P_y - u_y \cdot P_x) = 0$
- Definimos los siguientes parámetros:

La ecuación general o implícita

- A partir de la ecuación continua: $\dfrac{x - P_x}{u_x} = \dfrac{y - P_y}{u_y}$
- Realizamos los productos cruzados e igualamos a 0:
- $u_y(x - P_x) - u_x(y - P_y) = 0 \Rightarrow u_y \cdot x + (-u_x) \cdot y + (u_x \cdot P_y - u_y \cdot P_x) = 0$
- Definimos los siguientes parámetros:
  - $a \equiv u_y$

La ecuación general o implícita

- A partir de la ecuación continua: $\dfrac{x - P_x}{u_x} = \dfrac{y - P_y}{u_y}$
- Realizamos los productos cruzados e igualamos a 0:
- $u_y(x - P_x) - u_x(y - P_y) = 0 \Rightarrow u_y \cdot x + (-u_x) \cdot y + (u_x \cdot P_y - u_y \cdot P_x) = 0$
- Definimos los siguientes parámetros:
  - $a \equiv u_y$
  - $b \equiv -u_x$

La ecuación general o implícita

- A partir de la ecuación continua: $\dfrac{x - P_x}{u_x} = \dfrac{y - P_y}{u_y}$
- Realizamos los productos cruzados e igualamos a 0:
- $u_y(x - P_x) - u_x(y - P_y) = 0 \Rightarrow u_y \cdot x + (-u_x) \cdot y + (u_x \cdot P_y - u_y \cdot P_x) = 0$
- Definimos los siguientes parámetros:
  - $a \equiv u_y$
  - $b \equiv -u_x$
  - $c \equiv u_x \cdot P_y - u_y \cdot P_x$

La ecuación general o implícita

- A partir de la ecuación continua: $\dfrac{x - P_x}{u_x} = \dfrac{y - P_y}{u_y}$
- Realizamos los productos cruzados e igualamos a 0:
- $u_y(x - P_x) - u_x(y - P_y) = 0 \Rightarrow u_y \cdot x + (-u_x) \cdot y + (u_x \cdot P_y - u_y \cdot P_x) = 0$
- Definimos los siguientes parámetros:
  - $a \equiv u_y$
  - $b \equiv -u_x$
  - $c \equiv u_x \cdot P_y - u_y \cdot P_x$
- Así, la ecuación obtenida será $\boxed{ax + by + c = 0}$

La ecuación general o implícita

- A partir de la ecuación continua: $\dfrac{x - P_x}{u_x} = \dfrac{y - P_y}{u_y}$
- Realizamos los productos cruzados e igualamos a 0:
- $u_y(x - P_x) - u_x(y - P_y) = 0 \Rightarrow u_y \cdot x + (-u_x) \cdot y + (u_x \cdot P_y - u_y \cdot P_x) = 0$
- Definimos los siguientes parámetros:
  - $a \equiv u_y$
  - $b \equiv -u_x$
  - $c \equiv u_x \cdot P_y - u_y \cdot P_x$
- Así, la ecuación obtenida será $\boxed{ax + by + c = 0}$
- Los vectores $\vec{n} = (a, b)$ y $\vec{u_r} = (u_x, u_y) = (-b, a)$ son perpendiculares.[1]

[1] La demostración se deja para 1.º de bachillerato.

Ecuaciones de la recta en el plano

La ecuación punto-pendiente

La ecuación punto-pendiente

- Si conocemos un punto $P = (x_P, y_P)$ de la recta y su pendiente m, su **ecuación punto-pendiente** es:

Ecuaciones de la recta en el plano

La ecuación punto-pendiente

La ecuación punto-pendiente

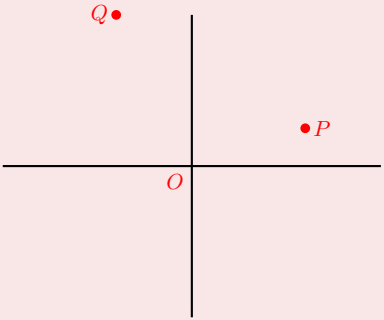
- Si conocemos un punto $P = (x_P, y_P)$ de la recta y su pendiente m, su **ecuación punto-pendiente** es:
- $\boxed{y - y_P = m(x - x_P)}$

Distancia entre dos puntos

Distancia entre dos puntos P y Q

- Sea dos puntos P y Q:

Figuras

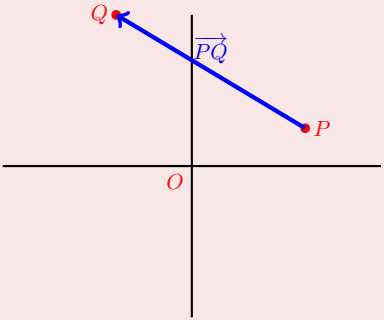


Distancia entre dos puntos

Distancia entre dos puntos P y Q

- Sea dos puntos P y Q:
- La distancia entre ambos será el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$

Figuras

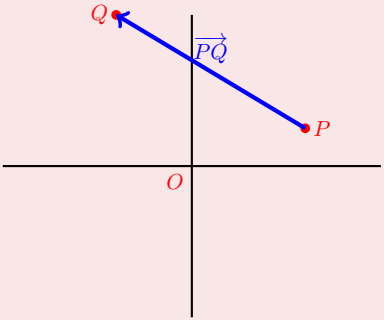


Distancia entre dos puntos

Distancia entre dos puntos P y Q

- Sea dos puntos P y Q:
- La distancia entre ambos será el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$
- $\boxed{d(P,Q) = \sqrt{(Q_x - P_x)^2 + (Q_y - P_y)^2}}$

Figuras



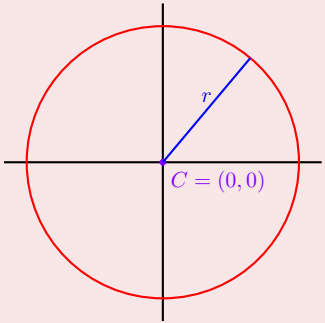
La circunferencia

La ecuación canónica

La ecuación canónica

- Sea una circunferencia centrada en O de radio r

Figuras



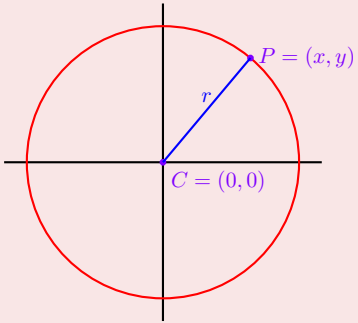
La circunferencia

La ecuación canónica

La ecuación canónica

- Sea una circunferencia centrada en O de radio r
- Sea un punto $P = (x, y)$ genérico de la circunferencia.

Figuras



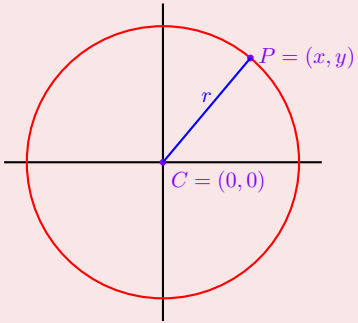
La circunferencia

La ecuación canónica

La ecuación canónica

- Sea una circunferencia centrada en O de radio r
- Sea un punto $P = (x, y)$ genérico de la circunferencia.
- Imponemos que $d(P, O) = r \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = r$

Figuras



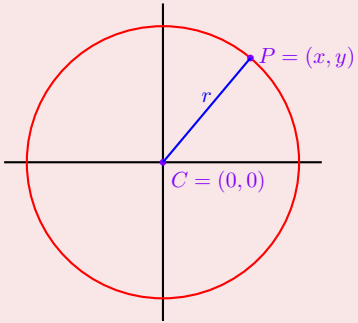
La circunferencia

La ecuación canónica

La ecuación canónica

- Sea una circunferencia centrada en O de radio r
- Sea un punto $P = (x, y)$ genérico de la circunferencia.
- Imponemos que $d(P, O) = r \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = r$
- Elevando al cuadrado: $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$

Figuras



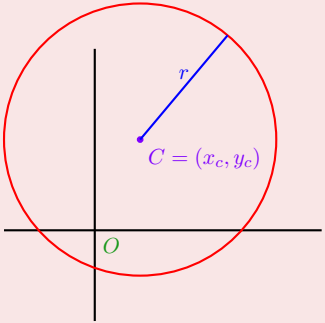
La circunferencia

La ecuación ordinaria

La ecuación ordinaria

- Sea una circunferencia centrada en $C = (x_x, y_c)$ de radio r

Figuras



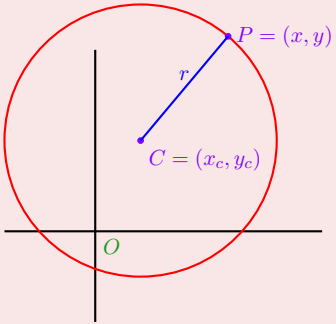
La circunferencia

La ecuación ordinaria

La ecuación ordinaria

- Sea una circunferencia centrada en $C = (x_x, y_c)$ de radio r
- Sea un punto $P = (x, y)$ genérico de la circunferencia.

Figuras



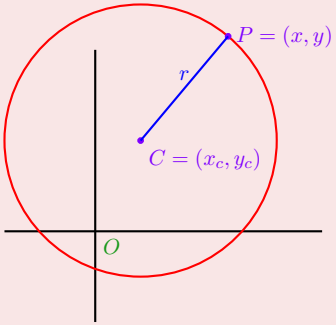
La circunferencia

La ecuación ordinaria

La ecuación ordinaria

- Sea una circunferencia centrada en $C = (x_x, y_c)$ de radio r
- Sea un punto $P = (x, y)$ genérico de la circunferencia.
- Imponemos que $d(P, C) = r \Rightarrow \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} = r$

Figuras



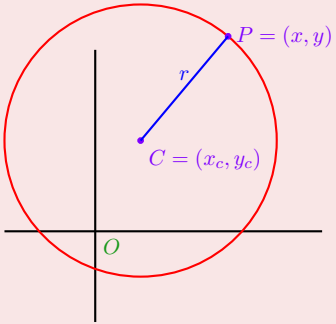
La circunferencia

La ecuación ordinaria

La ecuación ordinaria

- Sea una circunferencia centrada en $C = (x_x, y_c)$ de radio r
- Sea un punto $P = (x, y)$ genérico de la circunferencia.
- Imponemos que $d(P, C) = r \Rightarrow \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} = r$
- Elevando al cuadrado: $\boxed{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2}$

Figuras



La circunferencia

La ecuación general

La ecuación general

- Desarrollamos la ecuación ordinaria: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$

La circunferencia

La ecuación general

La ecuación general

- Desarrollamos la ecuación ordinaria: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$
- $x^2 - 2 \cdot x_c \cdot x + x_c^2 + y^2 - 2 \cdot y_c \cdot y + y_c^2 - r^2 = 0$

La circunferencia

La ecuación general

La ecuación general

- Desarrollamos la ecuación ordinaria: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$
- $x^2 - 2 \cdot x_c \cdot x + x_c^2 + y^2 - 2 \cdot y_c \cdot y + y_c^2 - r^2 = 0$
- Agrupamos términos: $x^2 + y^2 - 2x_c \cdot x - 2y_c \cdot y + x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 0$

La circunferencia

La ecuación general

La ecuación general

- Desarrollamos la ecuación ordinaria: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$
- $x^2 - 2 \cdot x_c \cdot x + x_c^2 + y^2 - 2 \cdot y_c \cdot y + y_c^2 - r^2 = 0$
- Agrupamos términos: $x^2 + y^2 - 2x_c \cdot x - 2y_c \cdot y + x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 0$
- Definimos los siguientes coeficientes:

La circunferencia

La ecuación general

La ecuación general

- Desarrollamos la ecuación ordinaria: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$
- $x^2 - 2 \cdot x_c \cdot x + x_c^2 + y^2 - 2 \cdot y_c \cdot y + y_c^2 - r^2 = 0$
- Agrupamos términos: $x^2 + y^2 - 2x_c \cdot x - 2y_c \cdot y + x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 0$
- Definimos los siguientes coeficientes:
  - $a \equiv -2x_c$

La circunferencia

La ecuación general

La ecuación general

- Desarrollamos la ecuación ordinaria: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$
- $x^2 - 2 \cdot x_c \cdot x + x_c^2 + y^2 - 2 \cdot y_c \cdot y + y_c^2 - r^2 = 0$
- Agrupamos términos: $x^2 + y^2 - 2x_c \cdot x - 2y_c \cdot y + x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 0$
- Definimos los siguientes coeficientes:
  - $a \equiv -2x_c$
  - $b \equiv -2y_c$

La circunferencia

La ecuación general

La ecuación general

- Desarrollamos la ecuación ordinaria: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$
- $x^2 - 2 \cdot x_c \cdot x + x_c^2 + y^2 - 2 \cdot y_c \cdot y + y_c^2 - r^2 = 0$
- Agrupamos términos: $x^2 + y^2 - 2x_c \cdot x - 2y_c \cdot y + x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 0$
- Definimos los siguientes coeficientes:
  - $a \equiv -2x_c$
  - $b \equiv -2y_c$
  - $c \equiv x_c^2 + y_c^2 - r^2$

La circunferencia

La ecuación general

La ecuación general

- Desarrollamos la ecuación ordinaria: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$
- $x^2 - 2 \cdot x_c \cdot x + x_c^2 + y^2 - 2 \cdot y_c \cdot y + y_c^2 - r^2 = 0$
- Agrupamos términos: $x^2 + y^2 - 2x_c \cdot x - 2y_c \cdot y + x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 0$
- Definimos los siguientes coeficientes:
  - $a \equiv -2x_c$
  - $b \equiv -2y_c$
  - $c \equiv x_c^2 + y_c^2 - r^2$
- La ecuación general será: $\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$

La circunferencia

Obtención del centro y radio

La ecuación general

- A partir de la ecuación general $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

La circunferencia

Obtención del centro y radio

La ecuación general

- A partir de la ecuación general $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
- Recordamos:

La circunferencia

Obtención del centro y radio

La ecuación general

- A partir de la ecuación general $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
- Recordamos:
  - $a \equiv -2x_c$

La circunferencia

Obtención del centro y radio

La ecuación general

- A partir de la ecuación general $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
- Recordamos:
  - $a \equiv -2x_c$
  - $b \equiv -2y_c$

La circunferencia

Obtención del centro y radio

La ecuación general

- A partir de la ecuación general $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
- Recordamos:
  - $a \equiv -2x_c$
  - $b \equiv -2y_c$
  - $c \equiv x_c^2 + y_c^2 - r^2$

La circunferencia

Obtención del centro y radio

La ecuación general

- A partir de la ecuación general $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
- Recordamos:
  - $a \equiv -2x_c$
  - $b \equiv -2y_c$
  - $c \equiv x_c^2 + y_c^2 - r^2$
- Despejamos: $\begin{cases} C = \left(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{b}{2}\right) \\ r = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 - c} \end{cases}$

La circunferencia

Obtención del centro y radio

La ecuación general

- A partir de la ecuación general $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
- Recordamos:
  - $a \equiv -2x_c$
  - $b \equiv -2y_c$
  - $c \equiv x_c^2 + y_c^2 - r^2$
- Despejamos: $\begin{cases} C = \left(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{b}{2}\right) \\ \\ r = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 - c} \end{cases}$
- ☞ Sólo es una circunferencia si tras igualar los coeficientes de x^2 e y^2 a 1 $r^2 = x_c^2 + y_c^2 - c > 0$