1. Ejercicios de recta tangente a una curva.

La ecuación de la recta tangente a una curva $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ es:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Vemos que el valor de la derivada, si sustituimos la x por el valor de la abscisa (la coordenada x) del punto correspondiente, es la pendiente de la recta.

Lo más habitual es que nos den el valor de x_0, pero también nos pueden dar el valor de $f'(x_0)$ de forma indirecta, o el caso un poco más complicado de tener que hallar x_0.

Vamos a ver muchos ejercicios, con un gran abanico de formas diferentes de pediros la ecuación de la recta tangente a una curva.

Ej. 1: Obtén la ecuación de la recta tangente, paralela al eje de abscisas, de la curva $f(x) = xlnx$.

Si la recta tangente tiene que ser paralela al eje de abscisas, será horizontal, es decir, de pendiente 0. Sabemos entonces que $f'(x_0) = 0$. Lo que no conocemos es x_0, pero la expresión anterior nos va a permitir calcularlo. Derivemos la función y la igualamos a cero:

$$lnx + x \cdot \frac{1}{x} = 0$$

$$lnx + 1 = 0 \rightarrow lnx = -1 \rightarrow x = e^{-1}$$

Recordad que la base del logaritmo neperiano es el número e. Hemos encontrado entonces que el punto en el que la tangente vale cero tiene como abscisa $x_0 = e^{-1}$. Ya solo nos queda sustituir.

$$f(x_0) = f(e^{-1}) = e^{-1}\ln(e^{-1}) = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \rightarrow \qquad y = -\frac{1}{e}$$

La ecuación no tiene más terminos porque la derivada (la pendiente) vale 0.

Ej. 2: Dada la función $y = \frac{x^2-1}{x}$, halla los puntos en los que la pendiente de la recta tangente sea $\frac{5}{4}$.

Este ejemplo es muy parecido al anterior. Ahora nos dicen que $f'(x_0) = \frac{5}{4}$. Derivemos y resolvamos la ecuación:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2-1) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$$

$$\frac{x^2+1}{x^2} = \frac{5}{4} \rightarrow 4x^2 + 4 = 5x^2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x_0 = \pm 2$$

Tenemos entonces dos puntos en los que la pendiente de la recta tangente tendrá el valor pedido:

$$\left(2, \frac{3}{4}\right), \left(2, -\frac{3}{4}\right)$$

Como no nos piden la ecuación de la recta tangente, hemos terminado.

Ej. 3: Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $y = \frac{x-4}{x+2}$ que son paralelas a la recta $6x - y + 5 = 0$.

Ahora nos dan la pendiente que deben tener las tangentes, aunque de forma indirecta, ya que será la misma de la recta que nos dan. Para saber cuál es su pendiente tenemos que despejar la y:

$$y = 6x + 5$$

La pendiente es 6, así que ahora tenemos que ver en qué puntos la derivada vale 6:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+2) - (x-4) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x + 2 - x + 4}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}$$

$$\frac{6}{(x+2)^2} = 6 \to (x+2)^2 = 1 \to x + 2 = \pm 1 \to x_0 = -1, \quad x_0 = -3$$

Calculemos ahora el valor de la función en dichos puntos:

$$f(-1) = \frac{-1-4}{-1+2} = -5, \quad f(-3) = \frac{-3-4}{-3+2} = 7$$

Las ecuaciones de las rectas tangentes pedidas serán:

$$y = -5 + 6 \cdot (x+1)$$

$$y = 7 + 6 \cdot (x+3)$$

Ej. 4: Vamos a hallar la ecuación de la recta tangente en $x = 3$ a la gráfica de la función:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

Este es el caso más habitual y sencillo. Derivemos:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 2 = 11 \qquad f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 = 8$$

La recta tangente será: $y = 8 + 11 \cdot (x - 3)$

Si quitamos el paréntesis queda: $y = 11x - 25$

Vamos a ver si existe otra tangente a la gráfica de nuestra función que sea paralela a la que acabamos de encontrar. Para ello igualemos la derivada a 11 y veamos que valores se obtienen para x:

$$3x^2 - 6x + 2 = 11 \to 3x^2 - 6x - 9 = 0 \to x_0 = 3, \; x_0 = -1$$

Vemos que hay otro punto $x_0 = -1$, además del $x_0 = 3$ que ya conocíamos, en el que la recta tangente también tendrá pendiente 11. Hallémosla:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 2 = -4$$

La ecuación será: $y = -4 + 11 \cdot (x+1) \to y = 11x + 7$

Ej. 5: Halla la recta tangente a la curva $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en su punto de inflexión.

Empecemos calculando el punto de inflexión. Para ello, hallamos la segunda derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = 12x^2 - 4x \to f''(x) = 24x - 4$$

$$24x - 4 = 0 \to x_0 = \frac{1}{6}$$

Nuestra función tiene un punto de inflexión en $x_0 = \frac{1}{6}$ (ya que la tercera derivada no se anula en ese punto). Calculemos ahora los valores de la función y su derivada en él:

$$f\left(\frac{1}{6}\right) = 4\left(\frac{1}{6}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 10 = -\frac{271}{27}$$

$$f'\left(\frac{1}{6}\right) = 12\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

La ecuación de la recta tangente en dicho punto será:

$$y = -\frac{271}{27} - \frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{6}\right)$$

Ej. 6: Halla los puntos de la curva $y = \frac{1}{4}x^2 + 4x - 4$ en los que la recta tangente a ella pase por el punto (0,-8). Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos.

Como $f(x_0) = \frac{1}{4}x_0^2 + 4x_0 - 4$ y $f'(x_0) = \frac{1}{2}x_0 + 4$ la ecuación de la recta tangente será:

$$y = \frac{1}{4}x_0^2 + 4x_0 - 4 + \left(\frac{1}{2}x_0 + 4\right) \cdot (x - x_0)$$

Como nos dicen que la recta tangente pasa por el punto (0,-8), quiere decir que si $x = 0$ la $y = -8$. Sustituyamos entonces y despejemos el valor de x_0:

$$-8 = \frac{1}{4}x_0^2 + 4x_0 - 4 - \frac{1}{2}x_0^2 - 4x_0$$

Si multiplicamos todo por 4 para quitar denominadores y reducimos nos queda la siguiente ecuación de segundo grado:

$$x_0^2 = 16 \rightarrow x_0 = \pm 4$$

Como nos salen dos valores, tendremos dos rectas tangentes que cumplen la condición del enunciado. Las calculamos como en los ejercicios anteriores:

$$f(4) = \frac{1}{4}4^2 + 4 \cdot 4 - 4 = 16 \qquad f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4 + 4 = 6$$

$y = 16 + 6 \cdot (x - 4)$ o quitando paréntesis $y = 6x - 8$

$$f(-4) = \frac{1}{4}(-4)^2 + 4 \cdot (-4) - 4 = -16 \qquad f'(4) = \frac{1}{2} \cdot (-4) + 4 = 2$$

$y = -16 + 2 \cdot (x + 4)$ o quitando paréntesis $y = 2x - 8$

2. Ejercicios de cálculo de los coeficientes de una función.

En este tipo de ejercicios nos darán una función $f(x)$ con una serie de coeficientes, que tendremos que calcular para que se cumplan las condiciones del enunciado. Para ello es muy útil tener en cuenta lo siguiente:

- Si nos dicen que la función pasa por el punto $(x_0, y_0) \rightarrow f(x_0) = y_0$.

- Si nos dicen que la función corta al eje de abscisas en $x_0 \rightarrow f(x_0) = 0$.

- Si nos dicen que la función corta al eje de ordenadas en $y_0 \rightarrow f(0) = y_0$.

- Si nos dicen que la recta tangente en x_0 tiene pendiente $m \rightarrow f'(x_0) = m$.

- Si nos dicen que la recta tangente en (x_0, y_0) tiene pendiente $m \rightarrow f'(x_0) = m \quad f(x_0) = y_0$.

- Si nos dicen que la función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) en $x_0 \rightarrow f'(x_0) = 0$.

- Si nos dicen que la función tiene un extremo relativo en $(x_0, y_0) \rightarrow f'(x_0) = 0 \quad f(x_0) = y_0$.

- Si nos dicen que la función tiene un punto de inflexión en $x_0 \rightarrow f''(x_0) = 0$.

- Si nos dicen que la función tiene un punto de inflexión en $(x_0, y_0) \rightarrow f''(x_0) = 0 \quad f(x_0) = y_0$.

Pongamos todo esto en práctica con una serie de ejercicios.

Ej. 1: Dada la función $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{6}{x^2}$, calcular el valor de a sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 3$. ¿Se trata de un máximo o de un mínimo?

Como tiene un extremo relativo en $x = 3 \rightarrow f'(3) = 0$.

Calculemos entonces la derivada:

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} - \frac{12}{x^3}$$

Ahora sustituimos $x = 3$ y resolvemos la ecuación $f'(3) = 0$:

$$-\frac{a}{9} - \frac{12}{27} = 0 \rightarrow -3a - 12 = 0 \rightarrow a = -4$$

Para saber ahora si se trata de un máximo o un mínimo, estudiamos el signo de $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha de $x = 3$, teniendo en cuenta que:

$$f'(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{12}{x^3}$$

		3
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Vemos, por tanto, que el extremo relativo es un mínimo.

Ej. 2: De la función $f(x) = ax^3 + bx$ sabemos que pasa por (1,1) y en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x + y = 0$. Hallar a y b.

Como pasa por (1,1) $\rightarrow f(1) = 1 \rightarrow a + b = 1$.

Como nos dicen que la tangente en ese punto es paralela a la recta $3x + y = 0$, tendrá la misma pendiente. Si despejamos nos queda:

$$y = -3x$$

Así que la pendiente de la tangente en ese punto tiene que ser -3, o lo que es igual, $f'(1) = -3$.

Derivemos la función: $f'(x) = 3ax^2 + b$.

Se tendrá que cumplir entonces que $3a + b = -3$.

Tenemos que resolver el sistema formado por las condiciones:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + b = -3 \end{cases} \longrightarrow a = -2, b = 3$$

Ej. 3: Halla la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y un punto de inflexión en (1,2).

Tenemos que hallar el valor de tres letras, luego nos tienen que dar tres datos (que se traducirán en tres ecuaciones).

Nos dicen que hay extremo relativo en $x = 2 \rightarrow f'(2) = 0$. Calculemos la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

Sustituyendo $x = 2 \rightarrow f'(2) = 0 \rightarrow 12 + 6a + b = 0.$

Ya tenemos una ecuación, así que vamos a por la siguiente. Como nos dicen que hay un punto de inflexión en (1,2) ya nos dan las otras dos condiciones:

$$f(1) = 2 \rightarrow 1 + a + b + c = 2$$

$$f''(x) = 6x + 2a \rightarrow f''(1) = 0 \rightarrow 6 + 2a = 0$$

Vamos a reunir las tres ecuaciones en un sistema:

$$\begin{cases} 12 + 6a + b = 0 \\ 1 + a + b + c = 2 \\ 6 + 2a = 0 \end{cases} \rightarrow a = -3, b = 6, c = -2$$

Como veis, los sistemas que salen son muy sencillos en estos ejercicios.

Ej. 4: Halla la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ sabiendo que:

a) La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = x$.
b) Tiene un extremo relativo en el punto (-1,0).

Vamos a por las tres ecuaciones que necesitamos. Vemos que la pendiente de la recta tangente en $x = 0$ es 1, así que $f'(0) = 1$. Derivemos y sustituyamos:

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow f'(0) = 1 \rightarrow c = 1$$

Como tiene un extremo relativo en (-1,0) nos dicen las otras dos condiciones que necesitamos. Por un lado $f(-1) = 0$, es decir:

$$1 - a + b - c = 0$$

Por otro lado $f'(-1) = 0$, es decir:

$$-4 + 3a - 2b + c = 0$$

Las reunimos en nuestro sistema:

$$\begin{cases} c = 1 \\ 1 - a + b - c = 0 \\ -4 + 3a - 2b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = b \\ 3a - 2b = 3 \end{cases} \rightarrow a = 3, b = 3, c = 1$$

Ej. 5: La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = -1$ y tiene un punto de inflexión en (2,1). Hallar los parámetros desconocidos.

Como corta al eje de abscisas en $x = -1 \rightarrow f(-1) = 0$ lo que implica:

$$-1 + a - b + c = 0$$

Como tiene un punto de inflexión en (2,1) por un lado $f(2) = 1$, lo que se traduce en:

$$8+4a+2b+c=1$$

Por otro lado $f''(2)=0$, es decir:

$$f''(x)=6x+2a \rightarrow 12+2a=0$$

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} -1+a-b+c=0 \\ 8+4a+2b+c=1 \\ 12+2a=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -b+c=7 \\ 2b+c=17 \\ a=-6 \end{cases} \rightarrow a=-6, b=\frac{10}{3}, c=\frac{31}{3}$$

Ej. 6: La función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ verifica $f(1)=1, f'(1)=0$ y no tiene extremo relativo en $x=1$. Hallar el valor de los coeficientes desconocidos.

$$f(1)=1 \rightarrow 1+a+b+c=1$$

$$f'(1)=0 \rightarrow 3+2a+b=0$$

Ahora cuidado, ya que nos dicen que en $x=1$ no hay extremo relativo. Como sabemos que $f'(1)=0$, para que no sea extremo relativo tiene que ser $f''(1)=0$ (ya que si $f''(1)>0$ sería un mínimo y si $f''(1)<0$ sería un máximo). Lo que tenemos en $x=1$ es un punto de inflexión ($f''(1)=0$) con tangente horizontal ($f'(1)=0$):

$$f''(1)=0 \rightarrow 6+2a=0$$

Nuestras tres condiciones forman el sistema:

$$\begin{cases} 1+a+b+c=1 \\ 3+2a+b=0 \\ 6+2a=0 \end{cases} \rightarrow a=-3, b=3, c=0$$