Matrices y determinantes.

David Matellano con la colaboración de Carmen Sancho y Lara Villaseñor.

Departamento de Matemáticas. IES Ángel Corella. (Colmenar Viejo)

27 de abril de 2022

índice de contenidos I

índice de contenidos II

índice de contenidos III

Definición de una matriz

Definición de una matriz: ✍

✍ Una matriz es un conjunto ordenado de términos estructurado en filas y columnas.

Definición de una matriz

Definición de una matriz: ✍

- ✍ Una matriz es un conjunto ordenado de términos estructurado en filas y columnas.
- ☞ Cada término está identificado por la fila y la columna (en este orden) a la que pertenece.

Definición de una matriz

Definición de una matriz: ✍

- ✍ Una matriz es un conjunto ordenado de términos estructurado en filas y columnas.
- ☞ Cada término está identificado por la fila y la columna (en este orden) a la que pertenece.
- ☞ El número de filas y columnas de la matriz nos da su **dimensión**.

Definición de una matriz

Definición de una matriz: ✍

- ✍ Una matriz es un conjunto ordenado de términos estructurado en filas y columnas.
- ☞ Cada término está identificado por la fila y la columna (en este orden) a la que pertenece.
- ☞ El número de filas y columnas de la matriz nos da su **dimensión**.

Ejemplos:

- ☞ Sea $A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & -6 & 3 \\ 4 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Definición de una matriz: ✍

- ✍ Una matriz es un conjunto ordenado de términos estructurado en filas y columnas.
- ☞ Cada término está identificado por la fila y la columna (en este orden) a la que pertenece.
- ☞ El número de filas y columnas de la matriz nos da su **dimensión**.

Ejemplos:

☞ Sea $A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & -6 & 3 \\ 4 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Es una matriz de dimensión 3×4, ya que tiene 3 filas y 4 columnas.

Definición de una matriz: ✍

- ✍ Una matriz es un conjunto ordenado de términos estructurado en filas y columnas.
- ☞ Cada término está identificado por la fila y la columna (en este orden) a la que pertenece.
- ☞ El número de filas y columnas de la matriz nos da su **dimensión**.

Ejemplos:

- ☞ Sea $A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & -6 & 3 \\ 4 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Es una matriz de dimensión 3×4, ya que tiene 3 filas y 4 columnas.

$a_{23} = -6$, ya que es el elemento de la segunda fila y tercera columna.

Tipos de matrices

Tipos de matrices ✍

- Matriz fila

Definiciones

☞ Está formada por una única fila

Ejemplos

- $A_{1\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \end{pmatrix}$

Tipos de matrices

Tipos de matrices ✍

- Matriz columna

Definiciones

☞ Está formada por una única columna

Ejemplos

- $A_{n\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$

Tipos de matrices

Tipos de matrices ✍

- Matriz rectangular

Definiciones

☞ El número de filas y columnas difiere

Ejemplos

- $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Tipos de matrices

Tipos de matrices ✍

- Matriz cuadrada

Definiciones

☞ El número de filas y columnas coincide

Ejemplos

- $A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Tipos de matrices

Tipos de matrices ✍

- Matriz cuadrada

Definiciones

☞ El número de filas y columnas coincide

Diagonal principal: $a_{ij} \ / \ i = j$

Ejemplos

- $A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Tipos de matrices

Tipos de matrices ✍

- Matriz cuadrada

Definiciones

☞ El número de filas y columnas coincide

Diagonal principal: $a_{ij} \ / \ i = j$

Diagonal secundaria: $a_{ij} \ / \ i + j = i + 1$

Ejemplos

- $A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Tipos de matrices

Tipos de matrices ✍

- Matriz diagonal

Definiciones

☞ Matriz cuadrada tal que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

Ejemplos

- $A_d = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Tipos de matrices

Tipos de matrices ✍

- Matriz diagonal

Definiciones

☞ Matriz cuadrada tal que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

Puede haber algún 0 en la diagonal principal

Ejemplos

- $A_d = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Tipos de matrices ✍

- Matriz nula

Definiciones

☞ $a_{ij} = 0 \; \forall i, j$

Ejemplos

- $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tipos de matrices

Tipos de matrices ✍

- Matriz escalar

Definiciones

☞ Matriz diagonal de términos iguales no nulos en la diagonal principal.

Ejemplos

- $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Tipos de matrices

Tipos de matrices ✍

- Matriz identidad de orden n

Definiciones

☞ Matriz escalar con $a_{ii} = 1$

Ejemplos

- $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tipos de matrices

Tipos de matrices ✍

- Matriz triangular superior

Definiciones

$$a_{ij} = 0 \ \forall i > j$$

Ejemplos

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Tipos de matrices ✍

- Matriz triangular inferior

Definiciones

$$a_{ij} = 0 \ \forall i < j$$

Ejemplos

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Obtención de la matriz traspuesta

- La matriz traspuesta de A, A^t, se obtiene permutando el número de fila y de columna de cada elemento de A:

Obtención de la matriz traspuesta

- La matriz traspuesta de A, A^t, se obtiene permutando el número de fila y de columna de cada elemento de A:

☞ $B = A^t \Rightarrow b_{ij} = a_{ji}$

Obtención de la matriz traspuesta

- La matriz traspuesta de A, A^t, se obtiene permutando el número de fila y de columna de cada elemento de A:

☞ $B = A^t \Rightarrow b_{ij} = a_{ji}$

Sólo coinciden sus dimensiones si A es cuadrada: $A_{n\times m} \Rightarrow A^t_{m\times n}$

Obtención de la matriz traspuesta

- La matriz traspuesta de A, A^t, se obtiene permutando el número de fila y de columna de cada elemento de A:

☞ $B = A^t \Rightarrow b_{ij} = a_{ji}$

Sólo coinciden sus dimensiones si A es cuadrada: $A_{n\times m} \Rightarrow A^t_{m\times n}$

Ejemplo

☞ Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Matriz simétrica

✍ A es una matriz simétrica $\Leftrightarrow A = A^t \; (a_{ij} = a_{ji})$

Matriz simétrica

✍ A es una matriz simétrica $\Leftrightarrow A = A^t \; (a_{ij} = a_{ji})$

A debe ser cuadrada.

Matriz simétrica

✍ A es una matriz simétrica $\Leftrightarrow A = A^t \ (a_{ij} = a_{ji})$

- A debe ser cuadrada.
- Todas las matrices diagonales son simétricas

Matriz simétrica

✍ A es una matriz simétrica $\Leftrightarrow A = A^t \; (a_{ij} = a_{ji})$

A debe ser cuadrada.

Todas las matrices diagonales son simétricas

Ejemplo

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = A$

Matriz antisimétrica

Definición

Matriz antisimétrica

✍ A es una matriz antisimétrica $\Leftrightarrow A = -A^t$ $(a_{ij} = -aji)$

Matriz antisimétrica

Definición

Matriz antisimétrica

✍ A es una matriz antisimétrica $\Leftrightarrow A = -A^t$ $(a_{ij} = -aji)$

A necesita ser cuadrada.

Matriz antisimétrica

✍ A es una matriz antisimétrica $\Leftrightarrow A = -A^t$ $(a_{ij} = -aji)$

A necesita ser cuadrada.

La diagonal principal ha de ser nula en todos sus términos $(a_{ii} = 0)$.

Matriz antisimétrica

✍ A es una matriz antisimétrica $\Leftrightarrow A = -A^t \ (a_{ij} = -aji)$

A necesita ser cuadrada.

La diagonal principal ha de ser nula en todos sus términos $(a_{ii} = 0)$.

Ejemplo

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -A$

Rango de una matriz

✍ El rango de una matriz A es el número de filas de A que son linealmente independientes.

Rango de una matriz

✍ El rango de una matriz A es el número de filas de A que son linealmente independientes.

El número de filas y columnas linealmente independientes **siempre** coinciden en una matriz

Rango de una matriz

- ✍ El rango de una matriz A es el número de filas de A que son linealmente independientes.
- El número de filas y columnas linealmente independientes **siempre** coinciden en una matriz
- ☞ Si a una fila o columna se le suma una combinación lineal del resto, el rango de A no varía.

Rango de una matriz

- ✍ El rango de una matriz A es el número de filas de A que son linealmente independientes.
- El número de filas y columnas linealmente independientes **siempre** coinciden en una matriz
- ☞ Si a una fila o columna se le suma una combinación lineal del resto, el rango de A no varía.

> ☞ El rango de A coincide con el número de filas no nulas de su matriz escalonada equivalente

El método de Gauss

- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -5 & 13 \end{pmatrix}$ (Ver mediante determinantes en 42)

El método de Gauss

- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -5 & 13 \end{pmatrix}$ (Ver mediante determinantes en 42)

Pasos

☞ $F_2' = F_2 - 2F_1$

Operaciones

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ -4 & -5 & 13 \end{pmatrix}$$

El método de Gauss

- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -5 & 13 \end{pmatrix}$ (Ver mediante determinantes en 42)

Pasos

☞ $F_2' = F_2 - 2F_1$

☞ $F_3' = F_3 + 4F_1$

Operaciones

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & -9 & 21 \end{pmatrix}$$

El método de Gauss

- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -5 & 13 \end{pmatrix}$ (Ver mediante determinantes en 42)

Pasos

☞ $F_2' = F_2 - 2F_1$

☞ $F_3' = F_3 + 4F_1$

☞ $F_3'' = F_3' + 3F_2'$

Operaciones

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El método de Gauss

- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -5 & 13 \end{pmatrix}$ (Ver mediante determinantes en 42)

Hay dos filas no nulas $\Rightarrow Rango(A) = 2$

Pasos

- ☞ $F_2' = F_2 - 2F_1$
- ☞ $F_3' = F_3 + 4F_1$
- ☞ $F_3'' = F_3' + 3F_2'$

Operaciones

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición

☞ Sólo podemos sumar matrices de dimensiones idénticas.

Definición

- ☞ Sólo podemos sumar matrices de dimensiones idénticas.
- ☞ Para ello sumamos los términos situados en las mismas posiciones:

Definición

- Sólo podemos sumar matrices de dimensiones idénticas.
- Para ello sumamos los términos situados en las mismas posiciones:

$$S = A + B \Rightarrow s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Definición

- Sólo podemos sumar matrices de dimensiones idénticas.
- Para ello sumamos los términos situados en las mismas posiciones:

$$S = A + B \Rightarrow s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Ejemplo

- Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Definición

- Sólo podemos sumar matrices de dimensiones idénticas.
- Para ello sumamos los términos situados en las mismas posiciones:

$$S = A + B \Rightarrow s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Ejemplo

- Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $S = A + B \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 2+4 & 3+2 \\ 1+1 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Definición

☞ Para multiplicar una matriz A por un escalar c se multiplica cada término de A por c

Definición

☞ Para multiplicar una matriz A por un escalar c se multiplica cada término de A por c

$$B = c \cdot A \Rightarrow b_{ij} = c \cdot a_{ij}$$

Definición

☞ Para multiplicar una matriz A por un escalar c se multiplica cada término de A por c

$$B = c \cdot A \Rightarrow b_{ij} = c \cdot a_{ij}$$

Ejemplo

☞ Sean $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix}$ y $c = 3$

Definición

☞ Para multiplicar una matriz A por un escalar c se multiplica cada término de A por c

$$B = c \cdot A \Rightarrow b_{ij} = c \cdot a_{ij}$$

Ejemplo

☞ Sean $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix}$ y $c = 3$

☞ $B = 3A = \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c & 3d \\ 3e & 3f & 3g & 3h \\ 3i & 3j & 3k & 3l \end{pmatrix}$

Producto de una matriz fila por una matriz columna

- ☞ Para multiplicar una matriz $F_{1\times n}$ por una matriz columna $C_{n\times 1}$ han de tener el mismo número de términos (n) .

Producto de una matriz fila por una matriz columna

- Para multiplicar una matriz $F_{1\times n}$ por una matriz columna $C_{n\times 1}$ han de tener el mismo número de términos (n) .
- El resultado es un escalar que se obtiene sumando los productos de los términos de igual ordinal en cada matriz:

Producto de una matriz fila por una matriz columna

- Para multiplicar una matriz $F_{1\times n}$ por una matriz columna $C_{n\times 1}$ han de tener el mismo número de términos (n) .
- El resultado es un escalar que se obtiene sumando los productos de los términos de igual ordinal en cada matriz:

$$r = \sum_{i=1}^{n} f_{1i} \cdot c_{i1}$$

Producto de una matriz fila por una matriz columna

- Para multiplicar una matriz $F_{1\times n}$ por una matriz columna $C_{n\times 1}$ han de tener el mismo número de términos (n) .
- El resultado es un escalar que se obtiene sumando los productos de los términos de igual ordinal en cada matriz:

$$r = \sum_{i=1}^{n} f_{1i} \cdot c_{i1}$$

Ejemplo

- Sean $F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Producto de una matriz fila por una matriz columna

- Para multiplicar una matriz $F_{1\times n}$ por una matriz columna $C_{n\times 1}$ han de tener el mismo número de términos (n) .
- El resultado es un escalar que se obtiene sumando los productos de los términos de igual ordinal en cada matriz:

$$r = \sum_{i=1}^{n} f_{1i} \cdot c_{i1}$$

Ejemplo

- Sean $F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $F \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} =$

Producto de una matriz fila por una matriz columna

- Para multiplicar una matriz $F_{1\times n}$ por una matriz columna $C_{n\times 1}$ han de tener el mismo número de términos (n) .
- El resultado es un escalar que se obtiene sumando los productos de los términos de igual ordinal en cada matriz:

$$r = \sum_{i=1}^{n} f_{1i} \cdot c_{i1}$$

Ejemplo

- Sean $F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $F \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2$

Producto de una matriz fila por una matriz columna

- Para multiplicar una matriz $F_{1\times n}$ por una matriz columna $C_{n\times 1}$ han de tener el mismo número de términos (n) .
- El resultado es un escalar que se obtiene sumando los productos de los términos de igual ordinal en cada matriz:

$$r = \sum_{i=1}^{n} f_{1i} \cdot c_{i1}$$

Ejemplo

- Sean $F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $F \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3$

Producto de una matriz fila por una matriz columna

- Para multiplicar una matriz $F_{1\times n}$ por una matriz columna $C_{n\times 1}$ han de tener el mismo número de términos (n) .
- El resultado es un escalar que se obtiene sumando los productos de los términos de igual ordinal en cada matriz:

$$r = \sum_{i=1}^{n} f_{1i} \cdot c_{i1}$$

Ejemplo

- Sean $F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $F \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-2)$

Producto de una matriz fila por una matriz columna

- Para multiplicar una matriz $F_{1\times n}$ por una matriz columna $C_{n\times 1}$ han de tener el mismo número de términos (n) .
- El resultado es un escalar que se obtiene sumando los productos de los términos de igual ordinal en cada matriz:

$$r = \sum_{i=1}^{n} f_{1i} \cdot c_{i1}$$

Ejemplo

- Sean $F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $F \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 4 - 3 - 6 = -5$

Producto de una matriz fila por una matriz columna

$\boxed{\text{El producto de matrices NO es conmumativo.}}$

Ejemplo

- Sean $F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $F \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 4 - 3 - 6 = -5$

Producto de dos matrices A y B

✍ Para realizar $A \cdot B$ hay que multiplicar las **filas de** A **por las columnas de** B, como vimos en 13

Producto de dos matrices A y B

- Para realizar $A \cdot B$ hay que multiplicar las **filas de** A **por las columnas de** B, como vimos en 13
- Es necesario que coincidan el número de columnas de A y el de filas de B

Producto de dos matrices A y B

- ✍ Para realizar $A \cdot B$ hay que multiplicar las **filas de A por las columnas de B**, como vimos en 13
- Es necesario que coincidan el número de columnas de A y el de filas de B
- Las dimensiones del producto serán el número de filas de A por el número de columnas de B

Producto de dos matrices A y B

- Para realizar $A \cdot B$ hay que multiplicar las **filas de A por las columnas de** B, como vimos en 13
- Es necesario que coincidan el número de columnas de A y el de filas de B
- Las dimensiones del producto serán el número de filas de A por el número de columnas de B
- $\boxed{C_{i\times j} = A_{i\times n} \cdot B_{n\times j}}$

Producto de dos matrices A y B

- Para realizar $A \cdot B$ hay que multiplicar las **filas de** A **por las columnas de** B, como vimos en 13
- Es necesario que coincidan el número de columnas de A y el de filas de B
- Las dimensiones del producto serán el número de filas de A por el número de columnas de B
- $\boxed{C_{i\times j} = A_{i\times n} \cdot B_{n\times j}}$
- Así, $\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}}$

Ejemplo

☞ Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ejemplo

☞ Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

✍ $C = A \cdot B \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

Ejemplo

☞ Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

✍ $C = A \cdot B \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

☞ Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

✍ $C = A \cdot B \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -14 \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

☞ Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

✍ $C = A \cdot B \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -14 \\ 2 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -14 \\ -12 & c_{22} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

☞ Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

✍ $C = A \cdot B \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -14 \\ -12 & 2 \cdot (-4) + 5 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -14 \\ -12 & -10 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

☞ Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

✍ $C = A \cdot B \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -14 \\ -12 & -10 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

☞ Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

✍ $D = B \cdot A \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} =$$

Ejemplo

☞ Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

✍ $D = B \cdot A \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-4) \cdot 2 & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

☞ Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

✍ $D = B \cdot A \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \cdot 1 + (-4) \cdot 5 & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -18 & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

☞ Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

✍ $D = B \cdot A \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -18 & 2 \cdot (-1) + (-4) \cdot (-1) \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -18 & 2 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

☞ Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

✍ $D = B \cdot A \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -18 & 2 \\ (-3) \cdot 3 + 0 \cdot 2 & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -18 & 2 \\ -9 & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

☞ Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

✍ $D = B \cdot A \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -18 & 2 \\ -9 & (-3)\cdot 1 + 0 \cdot 5 & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -18 & 2 \\ -9 & -3 & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

☞ Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

✍ $D = B \cdot A \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -18 & 2 \\ -9 & -3 & (-3)\cdot(-1) + 0 \cdot (-1) \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -18 & 2 \\ -9 & -3 & 3 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

☞ Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

✍ $D = B \cdot A \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -18 & 2 \\ -9 & -3 & 3 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -18 & 2 \\ -9 & -3 & 3 \\ 7 & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

☞ Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

✍ $D = B \cdot A \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -18 & 2 \\ -9 & -3 & 3 \\ 7 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -18 & 2 \\ -9 & -3 & 3 \\ 7 & 11 & d_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

☞ Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

✍ $D = B \cdot A \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ {\color{red}1} & {\color{blue}2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & {\color{red}-1} \\ 2 & 5 & {\color{blue}-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -18 & 2 \\ -9 & -3 & 3 \\ 7 & 11 & {\color{red}1 \cdot (-1)} + {\color{blue}2 \cdot (-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -18 & 2 \\ -9 & -3 & 3 \\ 7 & 11 & {\color{green}-3} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

☞ Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

☞ $\boxed{C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -14 \\ -12 & -10 \end{pmatrix};\; D = B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -18 & 2 \\ -9 & -3 & 3 \\ 7 & 11 & -3 \end{pmatrix}}$

Obsérvese las dimensiones de los productos:

- ☞ $C_{2\times 2} = A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 2}$
- ☞ $D_{3\times 3} = B_{3\times 2} \cdot A_{2\times 3}$

Ejemplo

- Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- $\boxed{C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -14 \\ -12 & -10 \end{pmatrix};\ D = B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -18 & 2 \\ -9 & -3 & 3 \\ 7 & 11 & -3 \end{pmatrix}}$

Obsérvese las dimensiones de los productos:

- $C_{2\times 2} = A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 2}$
- $D_{3\times 3} = B_{3\times 2} \cdot A_{2\times 3}$

$\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A \Rightarrow \text{El producto de matrices NO es conmutativo}}$

Propiedades de las operaciones con matrices

Álgebra de matrices

- Sea $\mathfrak{M}_{m\times n}$ el conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$. Si $A, B, C, D \in \mathfrak{M}_{m\times n}$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

Propiedades de las operaciones con matrices

Álgebra de matrices

- Sea $\mathfrak{M}_{m\times n}$ el conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$. Si $A, B, C, D \in \mathfrak{M}_{m\times n}$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

P. del producto de n^{os} por matrices

Asociativa: $a \cdot (bA) = (ab) \cdot A$

Propiedades de la suma de matrices

☞ **Asociativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Propiedades del producto de matrices

- **Asociativa:** $(A_{m\times n} \cdot B_{n\times p}) \cdot C_{p\times q} = A_{m\times n} \cdot (B_{n\times p} \cdot C_{p\times q})$

Propiedades de las operaciones con matrices

Álgebra de matrices

- Sea $\mathfrak{M}_{m\times n}$ el conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$. Si $A, B, C, D \in \mathfrak{M}_{m\times n}$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

Propiedades de la suma de matrices

- **Asociativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- **Conmutativa**: $A + B = B + A$.

P. del producto de n^{os} por matrices

Asociativa: $a \cdot (bA) = (ab) \cdot A$

Distributiva I: $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$

Propiedades del producto de matrices

- **Asociativa:** $(A_{m\times n} \cdot B_{n\times p}) \cdot C_{p\times q} = A_{m\times n} \cdot (B_{n\times p} \cdot C_{p\times q})$
- **No es conmutativa:** $A \cdot B \neq B \cdot A$

Propiedades de las operaciones con matrices

Álgebra de matrices

- Sea $\mathfrak{M}_{m\times n}$ el conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$. Si $A, B, C, D \in \mathfrak{M}_{m\times n}$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

Propiedades de la suma de matrices

- **Asociativa:** $(A+B)+C = A+(B+C)$.
- **Conmutativa**: $A+B = B+A$.
- **Elemento neutro:** la matriz $0_{m\times n}$, cuyos elementos son todos 0.
  $A+0 = 0+A = A$.

P. del producto de n^{os} por matrices

Asociativa: $a \cdot (bA) = (ab) \cdot A$
Distributiva I: $(a+b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$
Distributiva II:
$a \cdot (A+B) = a \cdot A + a \cdot B$

Propiedades del producto de matrices

- **Asociativa:** $(A_{m\times n} \cdot B_{n\times p}) \cdot C_{p\times q} = A_{m\times n} \cdot (B_{n\times p} \cdot C_{p\times q})$
- **No es conmutativa:** $A \cdot B \neq B \cdot A$
- **Distributiva:**
  $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$

Propiedades de las operaciones con matrices

Álgebra de matrices

- Sea $\mathfrak{M}_{m\times n}$ el conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$. Si $A, B, C, D \in \mathfrak{M}_{m\times n}$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

Propiedades de la suma de matrices

- **Asociativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- **Conmutativa**: $A + B = B + A$.
- **Elemento neutro:** la matriz $0_{m\times n}$, cuyos elementos son todos 0. $A + 0 = 0 + A = A$.
- **Elemento opuesto:** $-A$. La opuesta de $A = (a_{ij})$ es $-A = (-a_{ij})$ pues $A + (-A) = A - A = -A + A = 0$, ya que $(a_{ij}) + (-a_{ij}) = (a_{ij} - a_{ij}) = (0) = 0$.

P. del producto de n^{os} por matrices

Asociativa: $a \cdot (bA) = (ab) \cdot A$

Distributiva I: $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$

Distributiva II: $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$

Producto por el número 1: $1 \cdot A = A$

Propiedades del producto de matrices

- **Asociativa:** $(A_{m\times n} \cdot B_{n\times p}) \cdot C_{p\times q} = A_{m\times n} \cdot (B_{n\times p} \cdot C_{p\times q})$
- **No es conmutativa:** $A \cdot B \neq B \cdot A$
- **Distributiva:** $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- **Distributiva:** $(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$

Trasposición del producto de dos matrices

☞ Una propiedad muy importante es el cálculo de la traspuesta de un producto de matrices:

Trasposición del producto de dos matrices

☞ Una propiedad muy importante es el cálculo de la traspuesta de un producto de matrices:

✍ $\boxed{(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t}$

Trasposición del producto de dos matrices

☞ Una propiedad muy importante es el cálculo de la traspuesta de un producto de matrices:

✍ $\boxed{(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t}$

Nótese que se cambia el orden del producto.

Definición de determinante: ✍

✍ Un determinante es un escalar asociado a cualquier **matriz cuadrada**.

Definición de determinante

Definición de determinante: ✍

- ✍ Un determinante es un escalar asociado a cualquier **matriz cuadrada**.
- ☞ Sea una matriz cuadrada A. Su determinante se escribe $|A|$ o $det(A)$

Definición de determinante

Definición de determinante: ✍

- ✍ Un determinante es un escalar asociado a cualquier **matriz cuadrada**.
- ☞ Sea una matriz cuadrada A. Su determinante se escribe $|A|$ o $det(A)$
- No tiene nada que ver con el valor absoluto de A

Definición de determinante

Definición de determinante: ✍

✍ Un determinante es un escalar asociado a cualquier **matriz cuadrada**.

☞ Sea una matriz cuadrada A. Su determinante se escribe $|A|$ o $det(A)$

No tiene nada que ver con el valor absoluto de A

Ejemplo:

☞ Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -6 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -6 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

Cálculo de $|A_{2\times 2}|$

☞ Sea $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Regla 2×2

Cálculo de $|A_{2\times 2}|$

- Sea $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
- Su determinante será: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Regla 2×2

Cálculo de $|A_{2\times 2}|$

- ☞ Sea $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
- ☞ Su determinante será: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
- ✍ Su valor es: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

Regla 2×2

Cálculo de $|A_{2\times 2}|$

- Sea $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
- Su determinante será: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
- Su valor es: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$
- ¡Atención al signo negativo!

Regla 2×2

Determinante de orden 2

Cálculo de su valor

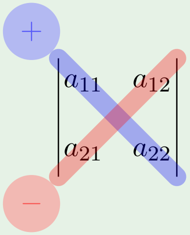
Cálculo de $|A_{2\times 2}|$

☞ Sea $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

☞ Su determinante será: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

✍ Su valor es: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

Regla 2×2

☞ 

Ejemplo

☞ $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$

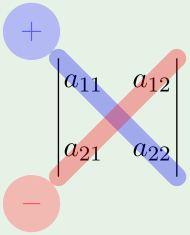
Determinante de orden 2

Cálculo de su valor

Cálculo de $|A_{2\times 2}|$

- Sea $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
- Su determinante será: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
- Su valor es: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

Regla 2×2



Ejemplo

- $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 = -4 - 3 = \boxed{-7}$

Pautas para obtener el valor de $|A|$

- Dado el determinante $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

La regla de Sarrus

Obtención de un determinante de orden 3 ✍

Pautas para obtener el valor de $|A|$

- Dado el determinante $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

☞ Hay que realizar 6 productos con un elemento de cada fila y cada columna cada vez.

Pautas para obtener el valor de $|A|$

- Dado el determinante $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

☞ Hay que realizar 6 productos con un elemento de cada fila y cada columna cada vez.

☞ Las tres *diagonales descendientes* conservan su signo.

Pautas para obtener el valor de $|A|$

- Dado el determinante $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

☞ Hay que realizar 6 productos con un elemento de cada fila y cada columna cada vez.

☞ Las tres *diagonales descendientes* conservan su signo.

☞ Las tres *diagonales ascendentes* cambian su signo.

La regla de Sarrus

Obtención de un determinante de orden 3 ✍

Pautas para obtener el valor de $|A|$

- Dado el determinante $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

☞ Hay que realizar 6 productos con un elemento de cada fila y cada columna cada vez.

☞ Las tres *diagonales descendientes* conservan su signo.

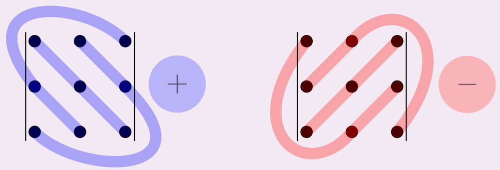
☞ Las tres *diagonales ascendentes* cambian su signo.

- Veamos su desarrollo:

La regla de Sarrus

Obtención de un determinante de orden 3 ✍

Signos: Regla de Sarrus



Pasos

- Realizamos P_1

Operaciones

- $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$

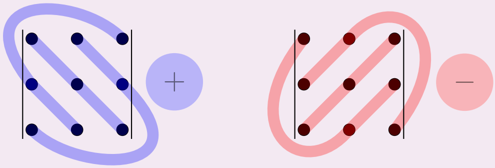
La regla de Sarrus

Obtención de un determinante de orden 3 ✍

Pasos

- Realizamos P_2

Signos: Regla de Sarrus



Operaciones

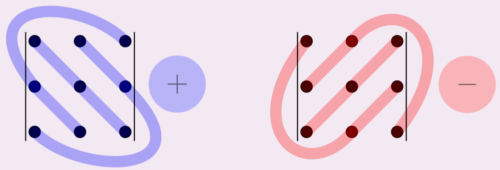
- $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$

La regla de Sarrus

Obtención de un determinante de orden 3 ✍

Signos: Regla de Sarrus



Pasos

- Realizamos P_3

Operaciones

- $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$

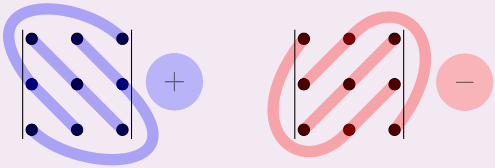
La regla de Sarrus

Obtención de un determinante de orden 3 ✍

Pasos

- Realizamos P_4

Signos: Regla de Sarrus

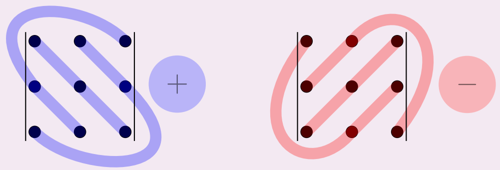


Operaciones ¡signo!

- $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}$$

Signos: Regla de Sarrus



Pasos

- Realizamos P_5

Operaciones ¡signo!

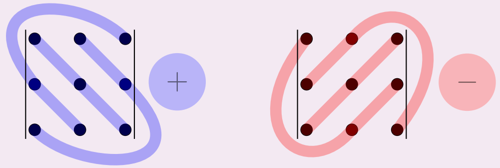
- $|A| = \begin{vmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \color{red}{a_{23}} \\ a_{31} & \color{red}{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} \color{red}{- a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}}$

La regla de Sarrus

Obtención de un determinante de orden 3 ✍

Signos: Regla de Sarrus



Pasos

- Realizamos P_6

Operaciones ¡signo!

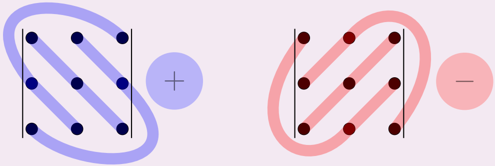
- $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & {\color{red}a_{12}} & a_{13} \\ {\color{red}a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & {\color{red}a_{33}} \end{vmatrix} =$

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} {\color{red}- a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}}$$

La regla de Sarrus

Ejemplo

Signos: Regla de Sarrus



Pasos

- Realizamos P_1

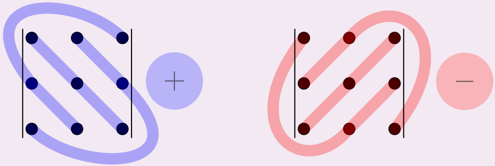
Operaciones

- $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$

$3 \cdot 2 \cdot 2$

La regla de Sarrus
Ejemplo

Signos: Regla de Sarrus



Pasos

- Realizamos P_2

Operaciones

- $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$

$$3 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \cdot 0$$

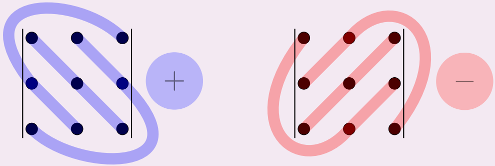
La regla de Sarrus

Ejemplo

Pasos

- Realizamos P_3

Signos: Regla de Sarrus



Operaciones

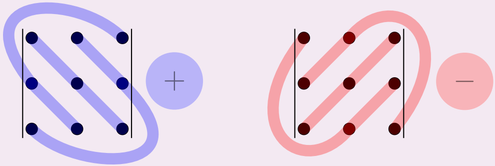
- $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$

$3 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 0$

La regla de Sarrus

Ejemplo

Signos: Regla de Sarrus



Pasos

- Realizamos P_4

Operaciones ¡signo!

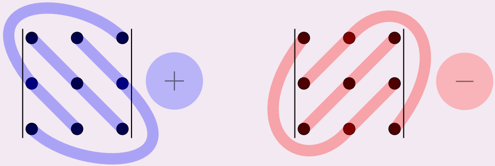
- $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$

$$3 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 0$$

La regla de Sarrus

Ejemplo

Signos: Regla de Sarrus



Pasos

- Realizamos P_5

Operaciones ¡signo!

- $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$

$$3 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 3 \cdot 3$$

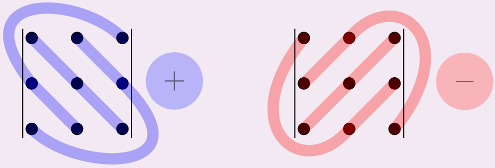
La regla de Sarrus

Ejemplo

Pasos

- Realizamos P_6

Signos: Regla de Sarrus



Operaciones ¡signo!

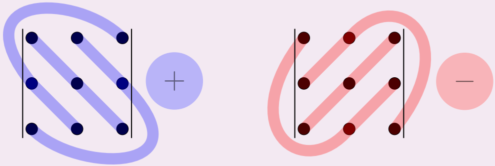
- $$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$3 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 3 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 \cdot 2 =$$

Pasos

- Obtenemos el resultado

Signos: Regla de Sarrus



Operaciones ¡signo!

- $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$

$3 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 3 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 \cdot 2 =$
$= 12 + 0 + 0 + 0 + 9 + 2$

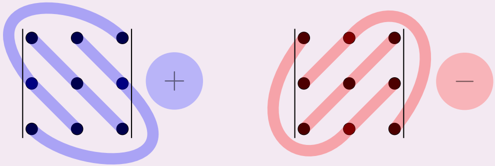
La regla de Sarrus

Ejemplo

Pasos

- Obtenemos el resultado

Signos: Regla de Sarrus



Operaciones ¡signo!

- $$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 23$$

$$3 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 3 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 \cdot 2 =$$
$$= 12 + 0 + 0 + 0 + 9 + 2 = 23$$

Menor complementario de un elemento a_{ij}

- Sea un elemento a_{ij} perteneciente a una matriz cuadrada A:

Menor complementario de un elemento a_{ij}

☞ Sea un elemento a_{ij} perteneciente a una matriz cuadrada A:

✍ Se define su menor complementario α_{ij} como el determinante de la submatriz obtenida al eliminar la fila i y la columna j de la matriz A

Menor complementario de un elemento a_{ij}

- ☞ Sea un elemento a_{ij} perteneciente a una matriz cuadrada A:
- ✍ Se define su menor complementario α_{ij} como el determinante de la submatriz obtenida al eliminar la fila i y la columna j de la matriz A

Ejemplos

- ☞ Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Menor complementario de un elemento a_{ij}

- Sea un elemento a_{ij} perteneciente a una matriz cuadrada A:
- Se define su menor complementario α_{ij} como el determinante de la submatriz obtenida al eliminar la fila i y la columna j de la matriz A

Ejemplos

- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Menor complementario de un elemento a_{ij}

- Sea un elemento a_{ij} perteneciente a una matriz cuadrada A:
- Se define su menor complementario α_{ij} como el determinante de la submatriz obtenida al eliminar la fila i y la columna j de la matriz A

Ejemplos

- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

Adjunto de un elemento a_{ij}

- ☞ Sea un elemento a_{ij} perteneciente a una matriz cuadrada A:

Adjunto de un elemento a_{ij}

- ☞ Sea un elemento a_{ij} perteneciente a una matriz cuadrada A:
- ✍ Se define su elemento adjunto A_{ij} como el menor complementario de a_{ij} precedido de un signo positivo o negativo en función de su posición:

Adjunto de un elemento a_{ij}

- ☞ Sea un elemento a_{ij} perteneciente a una matriz cuadrada A:
- ✍ Se define su elemento adjunto A_{ij} como el menor complementario de a_{ij} precedido de un signo positivo o negativo en función de su posición:
- ✍ $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}}$

Adjunto de un elemento a_{ij}

- Sea un elemento a_{ij} perteneciente a una matriz cuadrada A:
- Se define su elemento adjunto A_{ij} como el menor complementario de a_{ij} precedido de un signo positivo o negativo en función de su posición:
- $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}}$

Posiciones *pares e impares*

Las posiciones *pares e impares* se van alternando: $\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

Ejemplo

☞ Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo

☞ Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Ejemplo

☞ Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

Matriz adjunta de una matriz

- ☞ Sea la matriz cuadrada A:

Matriz adjunta de una matriz

- ☞ Sea la matriz cuadrada A:
- ✍ Su matriz adjunta, $Adj(A)$, es la matriz formada por los adjuntos de los elementos de A

Matriz adjunta de una matriz

- Sea la matriz cuadrada A:
- Su matriz adjunta, $Adj(A)$, es la matriz formada por los adjuntos de los elementos de A

Ejemplo:

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & -5 \\ -16 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Propiedades de los determinantes: ✍

1. El determinante de una matriz A y su traspuesta coinciden:
   ☞ $|A| = |A^t|$

Propiedades de los determinantes: ✍

1. El determinante de una matriz A y su traspuesta coinciden:
   ☞ $|A| = |A^t|$

Ejemplo: ✍

☞ $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☞ $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -15$

Propiedades de los determinantes: ✍

2. Si permutamos dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo:

Propiedades de los determinantes: ✍

2. Si permutamos dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo:

Ejemplo: ✍

☞ $$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 15 \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -15$$

Propiedades de los determinantes: ✍

3. Si se multiplica una fila o una columna por k, se multiplica el valor de $|A|$ por k:

$$☞ \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \dots & k \cdot a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot |A|$$

Propiedades de los determinantes: ✍

3. Si se multiplica una fila o una columna por k, se multiplica el valor de $|A|$ por k:

Ejemplo: ✍

☞ $$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2\cdot 5 & 2\cdot 1 & 2\cdot(-1) \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 50 = 100$$

Propiedades de los determinantes: ✍

3. Si se multiplica una fila o una columna por k, se multiplica el valor de $|A|$ por k:

   Si multiplicamos una matriz A por k, no equivale a multiplicar su determinante por k

   ☞ $\boxed{|k \cdot A_{n\times n}| = k^n \cdot |A|}$

Propiedades de los determinantes: ✍

3. Si se multiplica una fila o una columna por k, se multiplica el valor de $|A|$ por k:

   Si multiplicamos una matriz A por k, no equivale a multiplicar su determinante por k

   ☞ $\boxed{|k \cdot A_{n\times n}| = k^n \cdot |A|}$

Ejemplo: ✍

☞ $A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -1$

☞ $2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |2A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \cdot (-1) = -8$

Propiedades de los determinantes: ✍

4. Si un determinante $|A|$ posee una fila o columna nula $\Rightarrow |A| = 0$:

   A partir de la 3.ª propiedad[a], podemos extraer $k = 0$ como factor común.

---

[a] (Véase 3)

Propiedades de los determinantes: ✍

4. Si un determinante $|A|$ posee una fila o columna nula $\Rightarrow |A| = 0$:

   A partir de la 3.ª propiedad[a], podemos extraer $k = 0$ como factor común.

[a] (Véase 3)

Ejemplo: ✍

☞ $$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Propiedades de los determinantes: ✍

5. El determinante de un producto de matrices[a] es el producto de los determinantes

   ☞ $\boxed{|A \cdot B| = |A| \cdot |B|}$

[a] Obviamente han de ser cuadradas de iguales dimensiones

Propiedades de los determinantes: ✍

5. El determinante de un producto de matrices[a] es el producto de los determinantes

   ☞ $\boxed{|A\cdot B| = |A|\cdot|B|}$

[a] Obviamente han de ser cuadradas de iguales dimensiones

Ejemplo: ✍

☞ $$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 3;\ \ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 6$$

Propiedades de los determinantes: ✍

5. El determinante de un producto de matrices[a] es el producto de los determinantes

☞ $\boxed{|A\cdot B| = |A|\cdot|B|}$

[a] Obviamente han de ser cuadradas de iguales dimensiones

Ejemplo: ✍

☞ $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 3;\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 6$

☞ $C = A\cdot B = \begin{pmatrix} -4 & -12 & -10 \\ -3 & -3 & -3 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = |A|\cdot|B| = 3\cdot 6 = 18$

Propiedades de los determinantes: ✍

6. Si en un determinante una fila o columna es combinación lineal del resto, su valor es 0

☞ $$|A| = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ {\color{red} k_1 \cdot F_1 + k_2 \cdot F_2 + \cdots + k_n \cdot F_n} \\ \vdots \\ F_n \end{vmatrix} = 0$$

Propiedades de los determinantes: ✍

6. Si en un determinante una fila o columna es combinación lineal del resto, su valor es 0

$$|A| = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ k_1 \cdot F_1 + k_2 \cdot F_2 + \cdots + k_n \cdot F_n \\ \vdots \\ F_n \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo: ✍

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_1 + F_2} |A| = 0$$

Consecuencias de la propiedad anterior ✍

¡Recuerda! Si en un determinante una fila o columna es combinación lineal del resto, su valor es 0

Consecuencias de la propiedad anterior ✍

¡Recuerda! Si en un determinante una fila o columna es combinación lineal del resto, su valor es 0

- ☞ Un determinante es nulo si tiene dos filas o dos columnas iguales.

Ejemplo: ✍

☞ $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_1} |A| = 0$

Consecuencias de la propiedad anterior ✍

¡Recuerda! Si en un determinante una fila o columna es combinación lineal del resto, su valor es 0

- ☞ Un determinante es nulo si tiene dos filas o dos columnas iguales.
- ☞ Es nulo igualmente si una fila o columna es proporcional a otra.

Ejemplo: ✍

☞ $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ka & kb & kc \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = k \cdot F_1} |A| = 0, \forall k \in \mathbb{R}$

Combinaciones lineales ✍

7. Si a cualquier fila o columna se le suma una combinación lineal del resto, el determinante no varía su valor.

Combinaciones lineales ✍

7. Si a cualquier fila o columna se le suma una combinación lineal del resto, el determinante no varía su valor.

☞ $$|A| = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{vmatrix} = n \xrightarrow{F_i'=F_i+\sum_{j=1}^{n} k_j \cdot F_j} \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_i' \\ \vdots \\ F_n \end{vmatrix} = n$$

Ejemplo: ✍

☞ $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -22 \xrightarrow{F_3'=F_3+F_1-2F_2} |A'| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -22$$

Sumas en filas o columnas ✍

8. Si en un determinante una fila o columna i-ésima está formada por sumas de dos sumandos, el determinante es igual a la suma de dos determinantes, en los que se conserva cada fila o columna y la i-ésima de cada determinante se forma con cada uno de los sumandos de dicha fila o columna.

☞ $$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \color{red}{a_{i1}} + \color{blue}{b_{i1}} & \color{red}{a_{i2}} + \color{blue}{b_{i_2}} & \cdots & \color{red}{a_{in}} + \color{blue}{b_{in}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \color{red}{a_{i1}} & \color{red}{a_{i2}} & \cdots & \color{red}{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \color{blue}{b_{i1}} & \color{blue}{b_{i_2}} & \cdots & \color{blue}{b_{in}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Sumas en filas o columnas ✍

8. Si en un determinante una fila o columna i-ésima está formada por sumas de dos sumandos, el determinante es igual a la suma de dos determinantes, en los que se conserva cada fila o columna y la i-ésima de cada determinante se forma con cada uno de los sumandos de dicha fila o columna.

☞ $$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i_2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i_2} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ejemplo: ✍

☞ $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3+2 & 1+3 & 0+1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Propiedades de los determinantes

Determinante de una matriz triangular

Sea una matriz triangular ✍

9. El determinante de una matriz triangular (superior o inferior) es el producto de los términos en su diagonal principal.

☞
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \times & \times & \times & \times \\ & a_{22} & \times & \times & \times \\ & & a_{33} & \times & \times \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \times \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i_1}^{n} a_{ii}$$

Propiedades de los determinantes

Determinante de una matriz triangular

Sea una matriz triangular ✍

9. El determinante de una matriz triangular (superior o inferior) es el producto de los términos en su diagonal principal.

☞ $$\begin{vmatrix} a_{11} & \times & \times & \times & \times \\ & a_{22} & \times & \times & \times \\ & & a_{33} & \times & \times \\ & 0 & & \ddots & \times \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i1}^{n} a_{ii}$$

Ejemplo: ✍

☞ $$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 3 = -12$$

Desarrollo de un determinante por una fila o columna

☞ Sea el determinante $|A|$

✍ El valor del determinante es igual a la suma de los elementos de una fila o columna multiplicados cada uno de ellos por su elemento adjunto.

Desarrollo de un determinante por una fila o columna

☞ Sea el determinante $|A|$

✍ El valor del determinante es igual a la suma de los elementos de una fila o columna multiplicados cada uno de ellos por su elemento adjunto.

☞ Desarrollo por una fila *j-ésima*

Sea el determinante $|A|$

- El valor del determinante es igual a la suma de los elementos de una fila o columna multiplicados cada uno de ellos por su elemento adjunto.
- Desarrollo por una fila *j-ésima*
  - $$\boxed{|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot A_{ji}}$$

Desarrollo de un determinante por una fila o columna

☞ Sea el determinante $|A|$

✍ El valor del determinante es igual a la suma de los elementos de una fila o columna multiplicados cada uno de ellos por su elemento adjunto.

☞ Desarrollo por una fila *j-ésima*

- $$\boxed{|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot A_{ji}}$$

☞ Desarrollo por una columna *k-ésima*

Desarrollo de un determinante por una fila o columna

Sea el determinante $|A|$

- El valor del determinante es igual a la suma de los elementos de una fila o columna multiplicados cada uno de ellos por su elemento adjunto.
- Desarrollo por una fila *j-ésima*
  - $$\boxed{|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot A_{ji}}$$
- Desarrollo por una columna *k-ésima*
  - $$\boxed{|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}}$$

Desarrollo de un determinante por una fila o columna

Ejemplo

☞ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$

Desarrollo de un determinante por una fila o columna

Ejemplo

☞ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ ☞ Desarrollamos por la 2.ª fila, por ejemplo:

☞ $|A| = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}$

Ejemplo

☞ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ ☞ Desarrollamos por la 2.ª fila, por ejemplo:

☞ $|A| = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}$

☞ $|A| = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$

¡Recuerda el signo del adjunto que precede al menor complementario!

Desarrollo de un determinante por una fila o columna

Ejemplo

☞ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ ☞ Desarrollamos por la 2.ª fila, por ejemplo:

☞ $|A| = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}$

☞ $|A| = 1 \cdot \ (-1)^{2+1} \ \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \ (-1)^{2+2} \ \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$

¡Recuerda el signo del adjunto que precede al menor complementario!

Ejemplo

☞ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ ☞ Desarrollamos por la 2.ª fila, por ejemplo:

☞ $|A| = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}$

☞ $|A| = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

¡Recuerda el signo del adjunto que precede al menor complementario!

Desarrollo de un determinante por una fila o columna

Ejemplo

☞ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ ☞ Desarrollamos por la 2.ª fila, por ejemplo:

☞ $|A| = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}$

☞ $|A| = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

☞ $|A| = -1 \cdot 17 - 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-5) = 0$

Estrategias de resolución ✍

- ☞ Desarrollando por una fila o columna cualquier determinante de orden n, podemos obtener su resultado calculando n determinantes de orden $n-1$ [a]

[a] Véase la propiedad 11

Estrategias de resolución ✍

☞ Desarrollando por una fila o columna cualquier determinante de orden n, podemos obtener su resultado calculando n determinantes de orden $n-1$ [a]

💡 Muchas veces interesa *hacer ceros*[b] en la línea a desarrollar, para reducir el número de determinantes de orden $n-1$ a calcular.

[a] Véase la propiedad 11

[b] Recuerda la propiedad 7

Ejemplo: ✍

☞ $$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Pasos

☞ Elegimos la fila o columna más adecuada:

Ejemplo: ✍

☞ $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

Pasos

☞ Elegimos la fila o columna más adecuada:

La tercera columna tiene un 0 y un 1

Ejemplo: ✍

☞ $$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3' = F_3 - 3F_1} |A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -15 & -7 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Pasos

💡 $$F_3' = F_3 - 3F_1$$

Ejemplo: ✍

☞ $$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow[]{\substack{F_4' = F_4 + F_1 \\ F_3' = F_3 - 3F_1}} |A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -15 & -7 & 0 & 2 \\ 6 & 7 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Pasos

$$F_4' = F_4 + F_1$$

Ejemplo: ✍

☞ $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\ ]{\substack{F_4' = F_4 + F_1 \\ F_3' = F_3 - 3F_1}} |A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -15 & -7 & 0 & 2 \\ 6 & 7 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

☞ $A = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -15 & -7 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix}$

Pasos

💡 Desarrollamos por la tercera columna

Ejemplo: ✍

☞ $$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow[]{\substack{F_4' = F_4 + F_1 \\ F_3' = F_3 - 3F_1}} |A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -15 & -7 & 0 & 2 \\ 6 & 7 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

☞ $$A = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -15 & -7 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-72) = \boxed{-72}$$

Pasos

Desarrollamos por la tercera columna

Rango de una matriz

✍ El rango de una matriz A coincide con el orden de la mayor submatriz cuadrada cuyo determinante no sea nulo.

Ejemplo

- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -5 & 13 \end{pmatrix}$, vista con el método de Gauss (véase 10)

Ejemplo

- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -5 & 13 \end{pmatrix}$, vista con el método de Gauss (véase 10)

Pasos

☞ Calculamos $|A|$:

Operaciones

☞ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -5 & 13 \end{vmatrix} = 0$

Ejemplo

- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -5 & 13 \end{pmatrix}$, vista con el método de Gauss (véase 10)

Pasos

☞ Calculamos $|A|$:

Al ser $|A| = 0 \Rightarrow Rango(A) < 3$

☞ Buscamos un determinante de orden 2 no nulo en A

Operaciones

☞ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -5 & 13 \end{vmatrix} = 0$

Ejemplo

- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -5 & 13 \end{pmatrix}$, vista con el método de Gauss (véase 10)

Pasos

☞ Calculamos $|A|$:

Al ser $|A| = 0 \Rightarrow Rango(A) < 3$

☞ Buscamos un determinante de orden 2 no nulo en A

Hemos encontrado un menor de orden 2 no nulo.

Operaciones

☞ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Ejemplo

- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -5 & 13 \end{pmatrix}$, vista con el método de Gauss (véase 10)

Pasos

☞ Calculamos $|A|$:

Al ser $|A| = 0 \Rightarrow Rango(A) < 3$

☞ Buscamos un determinante de orden 2 no nulo en A

Hemos encontrado un menor de orden 2 no nulo.

☞ $\boxed{Rango(A) = 2}$

Operaciones

☞ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Definiciones

✍ Una matriz cuadrada es regular si existe su matriz inversa.

Definiciones

✍ Una matriz cuadrada es regular si existe su matriz inversa.

A es regular $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

Definiciones

✍ Una matriz cuadrada es regular si existe su matriz inversa.

A es regular $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

☞ La matriz inversa de A cumple:

☞ $\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I}$

Definiciones

✍ Una matriz cuadrada es regular si existe su matriz inversa.

A es regular $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

☞ La matriz inversa de A cumple:

- ☞ $\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I}$

Su determinante es el inverso del de A

- ☞ $\boxed{|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}}$

Cálculo de la matriz inversa mediante el uso de la matriz adjunta

✍ $$\boxed{A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{(Adj(A))^t}{|A|}}$$

Cálculo de la matriz inversa mediante el uso de la matriz adjunta

✍ $$\boxed{A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{(Adj(A))^t}{|A|}}$$

Sólo existe si $|A| \neq 0$

Ejemplo

☞ Calcúlese la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Ejemplo

☞ Calcúlese la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Pasos

☞ **Siempre** comenzamos calculando $|A|$

Operaciones

- $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 26 \neq 0$

Ejemplo

☞ Calcúlese la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Pasos

☞ **Siempre** comenzamos calculando $|A|$

☞ Calculamos $Adj(A)$ como vimos en 25

Operaciones

- $Adj(A) = \begin{pmatrix} 11 & -1 & 7 \\ 8 & 4 & -2 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Ejemplo

- Calcúlese la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Pasos

- **Siempre** comenzamos calculando $|A|$
- Calculamos $Adj(A)$ como vimos en 25
- Realizamos su traspuesta y dividimos entre $|A|$

Operaciones

- $\boxed{A^{-1} = \dfrac{\begin{pmatrix} 11 & 8 & 1 \\ -1 & 4 & 7 \\ 7 & -2 & 3 \end{pmatrix}}{26}}$

El método de Gauss-Jordan

- ☞ Dada una matriz A, realizamos una matriz $(A|I)$

El método de Gauss-Jordan

- Dada una matriz A, realizamos una matriz $(A|I)$
- Realizamos combinaciones lineales entre filas hasta que obtengamos $(I|A^{-1})$

Ejemplo

☞ Obtengamos de nuevo la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Ejemplo

☞ Obtengamos de nuevo la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Pasos

☞ Construimos nuestra matriz $(A|I)$

Operaciones

- $\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Ejemplo

- Obtengamos de nuevo la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Pasos

- Construimos nuestra matriz $(A|I)$
- $F_2' = F_2 - 2F_1$

Operaciones

- $\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{0} & 3 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Ejemplo

- Obtengamos de nuevo la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Pasos

- Construimos nuestra matriz $(A|I)$
- $F_2' = F_2 - 2F_1$
- $F_3' = F_3 + F_1$

Operaciones

- $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Ejemplo

- Obtengamos de nuevo la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Pasos

- Construimos nuestra matriz $(A|I)$
- $F_2' = F_2 - 2F_1$
- $F_3' = F_3 + F_1$
- $F_3'' = 3F_3' - 2F_2'$

Operaciones

- $\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & 7 & -2 & 3 \end{array}\right)$

Ejemplo

- Obtengamos de nuevo la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Pasos

- Construimos nuestra matriz $(A|I)$
- $F_2' = F_2 - 2F_1$
- $F_3' = F_3 + F_1$
- $F_3'' = 3F_3' - 2F_2'$
- $F_1' = 3F_1 + F_2'$

Operaciones

- $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & 7 & -2 & 3 \end{array}\right)$

Ejemplo

- Obtengamos de nuevo la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Pasos

- Construimos nuestra matriz $(A|I)$
- $F_2' = F_2 - 2F_1$
- $F_3' = F_3 + F_1$
- $F_3'' = 3F_3' - 2F_2'$
- $F_1' = 3F_1 + F_2'$
- $F_1'' = 26F_1' + F_3''$

Operaciones

- $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 78 & 0 & 0 & 33 & 24 & 3 \\ 0 & 3 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & 7 & -2 & 3 \end{array}\right)$

Ejemplo

- Obtengamos de nuevo la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Pasos

- Construimos nuestra matriz $(A|I)$
- $F_2' = F_2 - 2F_1$
- $F_3' = F_3 + F_1$
- $F_3'' = 3F_3' - 2F_2'$
- $F_1' = 3F_1 + F_2'$
- $F_1'' = 26F_1' + F_3''$
- $F_2'' = 26F_2' + 7F_3''$

Operaciones

- $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 78 & 0 & 0 & 33 & 24 & 3 \\ 0 & 78 & 0 & -3 & 12 & 21 \\ 0 & 0 & 26 & 7 & -2 & 3 \end{array}\right)$

Ejemplo

- Obtengamos de nuevo la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Pasos

- Construimos nuestra matriz $(A|I)$
- $F_2' = F_2 - 2F_1$
- $F_3' = F_3 + F_1$
- $F_3'' = 3F_3' - 2F_2'$
- $F_1' = 3F_1 + F_2'$
- $F_1'' = 26F_1' + F_3''$
- $F_2'' = 26F_2' + 7F_3''$
- Obtenemos I dividiendo las filas por el valor necesario y simplificamos

Operaciones

- $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{26} & \frac{4}{13} & \frac{1}{26} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{26} & \frac{2}{13} & \frac{7}{26} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{26} & -\frac{1}{13} & \frac{3}{26} \end{array}\right)$

¿Cómo podemos despejar la matriz X?

Sea la expresión matricial $A \cdot X \cdot B = C$

¿Cómo podemos despejar la matriz X?

Sea la expresión matricial $A \cdot X \cdot B = C$

☞ Si fuesen números, $X = \dfrac{C}{A \cdot B}$, pero ¿qué ocurre con las matrices?

¿Cómo podemos despejar la matriz X?

- Sea la expresión matricial $A \cdot X \cdot B = C$
  - ☞ Si fuesen números, $X = \dfrac{C}{A \cdot B}$, pero ¿qué ocurre con las matrices?
- Para despejar X hacemos uso de las matrices inversas. (Han de existir, claro)

¿Cómo podemos despejar la matriz X?

Sea la expresión matricial $A \cdot X \cdot B = C$

Pasos

- Eliminamos A multiplicando por A^{-1} ***por la izquierda*** en ambos lados de la igualdad.

Operaciones

- $A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C$

¿Cómo podemos despejar la matriz X?

Sea la expresión matricial $A \cdot X \cdot B = C$

Pasos

- Eliminamos A multiplicando por A^{-1} ***por la izquierda*** en ambos lados de la igualdad.

$A^{-1} \cdot A = I$

Operaciones

- $A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C$
- $I \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C$

¿Cómo podemos despejar la matriz X?

Sea la expresión matricial $A \cdot X \cdot B = C$

Pasos

- Eliminamos A multiplicando por A^{-1} ***por la izquierda*** en ambos lados de la igualdad.

$I \cdot X = X$

Operaciones

- $A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C$
- $I \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C$
- $X \cdot B = A^{-1} \cdot C$

¿Cómo podemos despejar la matriz X?

Sea la expresión matricial $A \cdot X \cdot B = C$

Pasos

- Eliminamos B multiplicando por B^{-1} ***por la derecha*** en ambos lados de la igualdad.

Operaciones

- $A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C$
- $I \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C$
- $X \cdot B = A^{-1} \cdot C$
- $X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

¿Cómo podemos despejar la matriz X?

Sea la expresión matricial $A \cdot X \cdot B = C$

Pasos

- Eliminamos B multiplicando por B^{-1} ***por la derecha*** en ambos lados de la igualdad.

$B \cdot B^{-1} = I$

Operaciones

- $A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C$
- $I \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C$
- $X \cdot B = A^{-1} \cdot C$
- $X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$
- $X \cdot I = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

¿Cómo podemos despejar la matriz X?

Sea la expresión matricial $A \cdot X \cdot B = C$

Operaciones

- $A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C$
- $I \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C$
- $X \cdot B = A^{-1} \cdot C$
- $X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$
- $X \cdot I = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$
- $\boxed{X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}}$

Pasos

- Eliminamos B multiplicando por B^{-1} ***por la derecha*** en ambos lados de la igualdad.
- Obtenemos la solución, ya que $X \cdot I = X$.