EXAMEN DE GRADO MEDIO
MAYO 2022
COMUNIDAD DE MADRID
MATEMÁTICAS

Pelayo Palacio Pérez

****

EJERCICIO 1

EJERCICIO 1

Resuelva las siguientes cuestiones de proporcionalidad:

a) Si por cinco horas de trabajo, Álvaro cobra 40 €, calcule cuánto cobrará si trabaja desde las 8 de la mañana hasta las 3 de la tarde (**1 punto**).

b) Si ocho máquinas de coser hacen un encargo en 10 horas, calcule cuánto tardarán cinco máquinas en realizar el mismo trabajo (**1 punto**).

a) Si por cinco horas de trabajo, Álvaro cobra 40 €, calcule cuánto cobrará si trabaja desde las 8 de la mañana hasta las 3 de la tarde.

Este es un típico problema de proporcionalidad. En este caso es proporcionalidad directa pues cuantos más horas trabaje, más dinero cobrará. Podemos resolverlo como sigue:

Antes de hacer los cálculos hay que darse cuenta que Álvaro trabaja 7 horas (desde las 8:00 hasta las 15:00).

1) $5\text{h} \longrightarrow 40$ €, entonces $5:5 = 1\text{h} \longrightarrow 40:5 = 8$ €, y por último,

$1 \cdot 7 = 7\text{h} \longrightarrow 8 \cdot 7 = 56$ €.

- Solución: cobrará 56 €.

2) $$\begin{cases} 5 \text{ h} \longrightarrow 40 \text{ euros} \\ 7 \text{ h} \longrightarrow x \text{ euros} \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{40 \text{ euros} \cdot 7 \text{ horas}}{5 \text{ horas}} = 56 \text{ €}.$$

- Solución: cobrará 56 €.

Nota: hay más métodos para resolver este tipo de problemas, pero estos dos son los principales.

b) Si ocho máquinas de coser hacen un encargo en 10 horas, calcule cuánto tardarán cinco máquinas en realizar el mismo trabajo.

Este es un típico problema de proporcionalidad. En este caso es proporcionalidad inversa pues a cuanta menos máquinas trabajen, más tiempo necesitaremos para hacer el mismo encargo. Podemos resolverlo como sigue:

1) 8m $\longrightarrow$ 10 horas, entonces $8 : 8 = 1$m $\longrightarrow 10 \cdot 8 = 80$ horas, y por último, $1 \cdot 5 = 5$m $\longrightarrow 80 : 5 = 16$ horas.

- Solución: tardarán 16 horas.

2) $$\begin{cases} 8\text{m} \longrightarrow 10 \text{ horas} \\ 5\text{m} \longrightarrow x \text{ horas} \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{10 \text{ horas} \cdot 8\text{m}}{5\text{m}} = 16 \text{ horas.}$$

- Solución: hubiesen durado 16 horas.

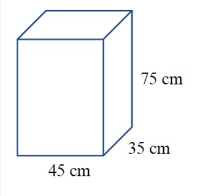
Nota: hay más métodos para resolver este tipo de problemas, pero estos dos son los principales.

****

EJERCICIO 2

EJERCICIO 2

Dada la figura adjunta en forma de caja de base rectangular cuyas medidas son: 75 cm de alto, 35 cm de ancho y 45 cm de largo. Calcule:



a) El volumen de la figura expresado en cm^3 y en litros (**1,5 puntos**).

b) El área total de la figura expresada en cm^2 (**1 punto**).

a) El volumen de la figura expresada en cm^3 y en litros.

En el caso de esta figura, un paralelepípedo, el volumen no es más que multiplicar el área de la base por la altura. Como la base es un rectángulo, su área será su base por su altura, es decir:

- $V = A_{base} \cdot h = 35 \cdot 45 \cdot 75 = 118.125 \text{cm}^3$
- Para hallar el volumen en litros tendremos en cuenta las relaciones $1\text{l} = 1\text{dm}^3$ y que $1\text{dm}^3 = 1.000\text{cm}^3$. Juntando ambas:
- $118.125\text{cm}^3 = 118.125\text{cm}^3 \dfrac{1\text{dm}^3}{1.000\text{cm}^3} = 118,125\text{dm}^3 = 118,125\text{l}$
- Solución: el volumen de la figura será de 118.125cm^3 o de $118,125$ litros.

b) El área total de la figura expresada en cm^2.

Para calcular el área de la figura calculamos el área de las bases (superior e inferior), el área de las caras laterales y las sumaremos. En todos los casos tenemos rectángulos así que sus áreas serán base por altura.
Las caras laterales se dividen en dos grupos: las dos que tienen base 35cm y altura 75cm y las dos que tienen base 45cm y altura 75cm. Es decir:

- Área de la base: $35 \cdot 45 = 1.575\text{cm}^2$
- Área lateral de base de 35cm: $35 \cdot 75 = 2.625\text{cm}^2$
- Área lateral de base de 45cm: $45 \cdot 75 = 3.375\text{cm}^2$
- Sumándolo todo: $\overbrace{2 \cdot 1.575}^{2\text{ “tapas”}} + \overbrace{2 \cdot 2.625}^{2\text{ caras de base 35cm}} + \overbrace{2 \cdot 3.375}^{2\text{ caras de base 45cm}} =$
  $= 3.150 + 5.250 + 6.750 = 15.150$
- <u>Solución:</u> el área total de la figura es de 15.150cm^2

****

EJERCICIO 3

EJERCICIO 3

Lanzamos un dado regular de seis caras y observamos el resultado obtenido. Calcule las siguientes probabilidades:

a) Sacar un número mayor que 3 (**0,5 puntos**).
b) Sacar un número menor o igual que 6 (**0,5 puntos**).
c) Sacar número par o 5 (**0,5 puntos**).
d) Sacar el número 4 (**0,5 puntos**).

a) Sacar un número mayor que 3.

- Usamos la definición de probabilidad según la regla de Laplace:

$$P(\text{sacar un número mayor que 3}) = \frac{\text{casos a favor}}{\text{total de casos}} =$$

$$= \frac{\text{sacar 4, 5 o 6}}{\text{sacar 1, 2, 3, 4, 5 o 6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\,\%$$

- <u>Solución:</u> la probabilidad pedida es de $\frac{1}{2}$ o de $0,5$ o del $50\,\%$.

b) Sacar un número menor o igual que 6.

- Usamos la definición de probabilidad según la regla de Laplace:

$$P(\text{sacar un número menor o igual que 6}) = \frac{\text{casos a favor}}{\text{total de casos}} =$$

$$= \frac{\text{sacar 1, 2, 3, 4, 5 o 6}}{\text{sacar 1, 2, 3, 4, 5 o 6}} = \frac{6}{6} = 1 = 100\,\%$$

- Solución: la probabilidad pedida es de 1 o del 100 %.

c) Sacar número par o 5.

- Usamos la definición de probabilidad según la regla de Laplace:

$$P(\text{sacar un número par o 5}) = \frac{\text{casos a favor}}{\text{total de casos}} =$$

$$= \frac{\text{sacar 2, 4, 6 o 5}}{\text{sacar 1, 2, 3, 4, 5 o 6}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0,66\ldots = 66,67\,\%$$

- Solución: la probabilidad pedida es de $\frac{2}{3}$ o de $0,67$ o del $66,67\,\%$.

d) Sacar el número 4.

- Usamos la definición de probabilidad según la regla de Laplace:

$$P(\text{sacar el número 4}) = \frac{\text{casos a favor}}{\text{total de casos}} =$$

$$= \frac{\text{sacar 4}}{\text{sacar 1, 2, 3, 4, 5 o 6}} = \frac{1}{6} = 0,166\ldots = 16,67\,\%$$

- Solución: la probabilidad pedida es de $\frac{1}{6}$ o de $0,17$ o del $16,67\,\%$.

****

EJERCICIO 4

EJERCICIO 4

Resuelva de forma razonada

a) El sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas (**1 punto**).

$$\begin{cases} 2x - y = 10 \\ 4(x+y) + 2 = 3(1-x) - y \end{cases}$$

b) La ecuación de segundo grado (**1 punto**).

$$(x-2)(x+2) = 12$$

a) $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ 4(x+y) + 2 = 3(1-x) - y \end{cases}$

Reordenamos el sistema anterior para presentarlo en la forma habitual:

- $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 10 \\ 4x + 4y + 2 = 3 - 3x - y \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - y = 10 \\ 7x + 5y = 1 \end{array}\right\}$ Y lo podemos resolver por el método, por ejemplo, de reducción sumando la primera ecuación multiplicada por cinco con la segunda para hacer desaparecer la variable **y**.

- $10x - 5y + 7x + 5y = 50 + 1 \Longrightarrow 17x = 51 \Longrightarrow x = 3$
- Sustituyendo el valor de "x" en cualquiera de las ecuaciones hallamos la otra incógnita. Si elegimos la primera:
  $2x - y = 10 \Longrightarrow 6 - y = 10 \Longrightarrow y = -4$

- Solución: $x = 3, \; y = -4.$

b) $(x-2)(x+2)=12$

Esta es una ecuación de segundo grado que se resuelven o bien usando lo fórmula general o dándonos cuenta de que estamos en un caso particular.

- Operamos y agrupamos todo en uno de los miembros ($(x-2)(x+2)$ es suma por diferencia cuyo resultado es diferencia de cuadrados):

  $x^2-4=12 \Longrightarrow x^2-16=0$

- Podemos resolver la ecuación anterior de dos formas:

  1ª) Usando la fórmula (no recomendable): tenemos que $a=1$, $b=0$ y $c=-16$

  - $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{0\pm\sqrt{0^2-4\cdot 1\cdot(-16)}}{2\cdot 1}=\frac{\pm\sqrt{64}}{2}=$$
    $$=\frac{\pm 8}{2}\Longrightarrow\begin{cases}\oplus: x_1=\dfrac{+8}{2}=4\\ \ominus: x_2=\dfrac{-8}{2}=-4\end{cases}$$

  - <u>Solución</u>: las soluciones son $x=-4$ y $x=4$

  2ª) Despejando x^2 y sacando raíz cuadrada directamente pues no hay término en "x":

  - $x^2=16 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{16}=x=\pm 4$

  - <u>Solución</u>: las soluciones son $x=-4$ y $x=4$

****

EJERCICIO 5

EJERCICIO 5

De un bidón con 27 litros de agua, Javier extrae los 2/7 para regar sus plantas y Laura, los 2/9 del resto para dar de beber a su familia. Calcule de forma razonada:

a) Qué fracción de agua se ha gastado (**0,75 puntos**).

b) Cuántos litros de agua se han gastado (**0,75 puntos**).

a) Qué fracción de agua se ha gastado.

Calculamos qué fracción del total se ha extraído en cada paso y después la sumamos.

- En el primer paso extraemos $\frac{2}{7}$ del total.

  Nos quedan, pues: $1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ del bidón.

- En el segundo paso extraemos $\frac{2}{9}$ de lo que nos queda en el bidón, esto es, de los $\frac{5}{7}$.

  $\frac{2}{9}$ de $\frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{9 \cdot 7} = \frac{10}{63}$

- Sumamos ambas fracciones:

  $\frac{2}{7} + \frac{10}{63} = \{\text{m.c.m}(7, 63) = 63\} = \frac{18}{63} + \frac{10}{63} = \frac{28}{63} = \frac{4}{9}$

- <u>Solución</u>: la fracción de agua que se ha gastado es de $\frac{4}{9}$.

b) Cuántos litros de agua se han gastado.

Una vez que sabemos qué fracción del total de agua hemos gastado calculamos los litros:

- $\frac{4}{9}$ de $27 = \frac{4 \cdot 27}{9} = 12$
- Solución: se han gastado 12 litros de agua.